

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

PIERRE GRATREAU

Première Thèse

"ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE D'UNE INJECTION
PAR CHAMPS CROISES DANS UN BETATRON A AIR"

Deuxième Thèse

Propositions données par la Faculté

SOUTENUES LE 19 JUIN 1963 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

M. GRIVET, Président

MM. BLANC-LAPIERRE, BERTEIN, Examineurs

M. BRUCK, Invité

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

PIERRE GRATREAU

Première Thèse

**"ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE D'UNE INJECTION
PAR CHAMPS CROISES DANS UN BETATRON A AIR"**

Deuxième Thèse

Propositions données par la Faculté

SOUTENUES LE 19 JUIN 1963 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

M. GRIVET, Président

MM. BLANC-LAPIERRE, BERTEIN, Examinateurs

M. BRUCK, Invité



(Janvier 1963)

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

- PROFESSEURS -

Doyen, ... M. ZAMANSKY.

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure	CAGNIARD	T	Géophysique appliquée
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparée	CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire
GRASSE	T	Evolution des êtres organisés	CUVILLIER	T	Micropaléontologie
PREVOST	T	Chimie organique	JUNG	T	Pétrographie
WYART	T	Minéralo et Cristallo	TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique
TEISSIER	T	Zoologie	WIEMANN	T	Chimie organique & struc.
MANGENOT	T	Biologie Vég. (Orsay)	JACQUINOT	T	Spectroscopie et Physique céleste (Orsay)
AUGER	T	Physique quantique et Relativité	VASSY	T	Physique de l'atmosphère
MONNIER	T	Physiologie Générale	DESTOUCHES	T	Théories Physiques
PIVETEAU	T	Paléontologie	AMIEL	T	Chimie générale
ROCARD	T	Physique (E. N. S.)	HOCART	T	Minéralogie et Cristallo
CARTAN	T	Mathématiques (E. N. S.)	J. P. MATHIEU	T	Physique Optique
LAFFITTE	T	Chimie générale	COUTEAUX	T	Biologie animale (P. C. B.)
FAVARD	T	Géométrie supérieure	MAY	T	Zoologie (Orsay)
COULOMB	T	Physique du Globe	CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie
Mlle COUSIN	T	Biologie Animale (SPCN)	FELDMANN	T	Biologie Végét. marine
CHRETIEN	T	Chimie minérale	GUINIER	T	Physique des Solides (Orsay)
DRACH	T	Zoologie	JOST	T	Physiologie comparée
KASTLER	T	Physique (E. N. S.)	FORTET	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique
EPHRUSSI	T	Génétique	SCHARTZ	T	Calcul diff. et Intégral
RIVIERE	T	Géologie SPCN & Sédim.	CHOUARD	T	Physiologie végétale
GAUTHERET	T	Biologie Vég. (PCB)	MALAVARD	T	Aviation (Techn. Aéronaut.)
LUCAS R.	T	Recherches Physiques	BRELOT	T	Calcul diff. et Intégral
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire	NORMANT	T	Chimie organique
ARNULF	T	Optique appliquée	BENARD	T	Chimie Minérale
MORAND	T	Physique Enseignement	BUVAT	T	Botanique (E. N. S.)
SOLEILLET	T	Physique (PCB)	DUGUE	T	Statistiques Mathématiques
FORTIER	T	Mécanique Exp. des Fluides	SOULAIRAC	T	Psychophysiologie
DANJON	T	Astronomie	ULRICH	T	Physiologie végétale
PETIT	T	Biologie maritime	MARECHAL	T	Optique théori. & appliq.
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique	KIRRMANN	T	Théories Chimiques
GALLIEN	T	Embryologie	CHADEFAUD	T	Botanique
EICHHORN	T	Botanique	Mlle LE BRETON	T	Physio. de la nutrition
DE CUGNAC	T	Biologie Vég. (SPCN)	SALEM	T	Mathématiques générales
Mlle CAUCHOIS	T	Chimie Physique	LELONG	T	Application de l'analyse à la Géométrie
THELLIER	T	Physique du Globe	DEVILLERS	T	Anatomie et Histol. Comp.
L'HERITIER	T	Biologie Géné. (Orsay)	EHRESMANN	T	Topologie Algébrique
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay)	FRANÇON	T	Physique (SPCN)
PONCIN	T	Mécanique Générale			
DUBREIL	T	Arithm. & Théorie des nombres			
QUELET	T	Chimie Organique			

SCHATZMAN	T	Astrophysique	GUANGAUD	T	Géographie Phys. & Géol. dynamique
TERMIER	T	Paléontologie stratig.	GODEMENT	T	Mathématiques (M. P. C.)
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales	PISOT	T	Tech. Mathém. de la Phys.
LENNUIER	T	Physique (M. G. P.)	ROCH	T	Géologie
RIZET	T	Génétique	DENY	T	Mathématiques Gén. Orsay
ROUTHIER	T	Géologie appliquée	GERMAIN	T	Mécanique théor. des fluides
Mme TONNELAT	T	Physique théorique	LUCAS G.	T	Géologie
DIXMIER	T	Mathématiques (MPC)	ALLARD	T	Chimie Physique
SOUCHAY	T	Chimie générale	BERTHELOT	T	Phys. des particules Fond.
AIGRAIN	T	Electrotechnique gén.	BRICART	T	Météor. et Phys. de l'Atmosphère
BRUSSET	T	Chimie systématique	Mme ALBE - FESSARD	T	Psychophysiologie
M. LEVY	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay)	FRIEDEL	T	Physique des Solides (Orsay)
Mme CHAIX	T	Chimie biologique	M. JULIA	T	Etudes des Moléculaires Naturelles complexes
Mme HUREL-	T	Biologie végétale (P. C. B.)	LENDER	T	Biologie Anim. SPCN Orsay
PIAUX	T	Chimie (M. P. C.)	MAGAT	T	Physio-Chimie des radio-éléments
BRUN	T	Mécanique théorique des fluides	Mlle QUINTIN	T	Electrochimie
LEDERER	T	Chimie biologique	BENOIT	T	Physiol. anim. (Orsay)
Mme DUBREIL	T	Mathématique (Agré.)	MATTIER	T	Physique SPCN
Mme LELONG	T	Mathématiques II (ENS)	DE POSSEL	T	Analyse numérique
BELLAIR	T	Géologie (SPCN)	CHARLOT	T	Chimie analytique
COTTE	T	Physique électricité	LEMEE	T	Physiol. Vég. BMPV(Orsay)
DUBOIS J. E.	T	Chimie organique	GUERIN	T	Chimie MPC(Orsay)
LAMOTTE	T	Zoologie (ENS)	CHATELET M.	T	Chimie PCB
MICHEL A.	T	Chimie minérale (Orsay)	JEAN	T	Physique nucléaire (Orsay)
OLMER	T	Energétique générale	MATTIER	T	Physique SPCN
ROUAULT	T	Electricité (Orsay)	BERGERARD	T	Zoologie (Orsay)
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée	BERTEIN	T	Electronique (Orsay)
BARCHEWITZ	T	Chimie Physique	BOUSSIÉRES	T	Chimie des radioélem. (Orsay)
BROSSEL	T	Physique atomique	Mme COUTURE	T	Thermodynamique et Méc. Physique
BUSER	T	Physiologie comparée	ELLENBERGER	T	Géologie des grandes régions du globe
CAMUS	T	Physiol. Végétale BMPV	FRANC	T	Biologie animale PCB
CASTAING	T	Physique II Thermod. (Orsay)	SCNELL	T	Botanique tropicale (Orsay)
CURIEN	T	Minéralo. & Cristallog.	STOLKOWSKI	T	Physiologie végétale
MOYSE	T	Physiologie végét. Orsay	ACHER	T	Chimie Biol. (Orsay)
NOIROT	T	Evolution des Etres Org.	BAUDOIN	T	Biologie animale (PCB)
PANNETIER	T	Chimie générale	BEAUMONT	T	Biologie animale SPCN
POSSOMPES	T	Zoologie	BLAMONT	T	Géophysique ionosphère
PULLMANN	T	Chimie quantique	BOURREAU	T	Botanique
TEILLAC	T	Physique Nucl. et Radio-activité	CURIE D.	T	Physique MGP
TONNELAT	T	Biologie Physico-chim.	DURAND-DELGA	T	Géologie
VILLE	T	Econométrie	FREON	T	Chimie organique (Orsay)
WILLEMART	T	Chimie (PCB)	HELLER	T	Physiolog. végétale
DODE	T	Chimie (Orsay)	TORTRAT	T	Calcul des Probabilités
FREYMANN	T	Recherches Physiques			
GUINOCHET	T	Biol. vég. SPCN (Orsay)			
ROLLET	T	Chimie minérale			
Mlle JOSIEN	T	Chimie SPCN			
CHEVALLEY	T	Géométrie algéb. et théorie des groupes			
ARNOULT	T	Electronique (Orsay)			

CHAPELLE	T	Physique (Orsay)	CAULLEUX	Géologie (SPCN)
DELANGE	T	Mathématiques I (Orsay)	MAGNAN	T Physique (SPCN)
Mlle VEIL		Physiologie Générale	DAUDEL	T Mécanique ondulatoire appliq.
LWOFF	T	Microbiologie		à la chimie théorique & à la
SIESTRUNCK	T	Mécan. Phys. & Expérим.		Phys. Nucléaire
LACOMBE	T	Métallurg. des métaux nucléaires	Mlle FOURCROY	Biologie Végétale SPCN
BROCHARD	T	Physique PCB (Orsay)	Mme CHOQUET-	T Mécan. Analytique et méca.
CABANNES	T	Mécanique générale	BRUHAT	céleste.
LESIEUR	T	Mathématiques I (Orsay)	ROSEAU	T Mécanique théoriq. des fluides
MAZET	T	Mécanique générale (Orsay)	ROUBINE	Electronique
CAIRE		Géographie Phys. et Géolog.	SILBER	T Chimie PCB
		Dynamique	UEBERSFELD	T Electronique
COMOLET	T	Mécanique des fluides	YVON	T Théories Physiques
CORABOEUF		Physiologie animale (Orsay)		
DELLOUE		Physique de l'exosphère		
GORENFLOT		Botanique II (Orsay)		
HOUILLO		Biologie animale PCB		
JULLIEN J.		Chimie SPCN (Orsay)		
MALGRANGE	T	Technique Math. de la Physique (Orsay)		
OLIVIER		Antropologie		
NOZERAN	T	Botanique II (Orsay)		
BLANC-	T	Physique ENS (Orsay)		
LAPIERRE				
CHEVAUGEON	T	Botanique (Orsay)		
KAHANE	T	Mathématiques (Orsay)		
SAMUEL	T	Mathémat. ENS féminines		
KOURGANOFF	T	Astronomie (Orsay)		
THIRY	T	Mécanique céleste		
ABELES		Physique SPSCN		
AMAT		Physique PCB		
AUBOIN		Géologie		
Mme BENOIT-		Physique Nucléaire et Radio-		
GUEUTAL		activité		
BOUGIS		Biologie marine (Villefranche/mer)		
BRUHAT	T	Mathématiques MPC		
BRUNN	T	Géologie historique (Orsay)		
CHABBAL		Physique MGP (Orsay)		
DEHEUVELS	T	Mathématiques Propé. (Orsay)		
D'ESPAGNAT		Physique théorique (Orsay)		
FURON		Géologie SPCN		
Mme GANS	T	Génétique		
GENEVES		Biologie végétale PCB		
GUILBERT		Physique (CUS Orléans)		
HUPE		Pétrographie		
HOLLANDE	T	Biologie générale		
LIONS	T	Analyse numérique		
MAITTE		Chimie PCB		
MEYER		Physique propédeutique		
NICOLAS		Géologie appliquée		
PANIGEL		Biologie générale		
RAVIER		Pétrographie		

LE SECRETAIRE GENERAL

R. POUILLAIN

TABLE DES MATIERES

	page
INTRODUCTION	1
RAPPELS SUR LA THEORIE GENERALE DU BETATRON " " " " " "	3
I - DETERMINATION D'UN BETATRON A AIR " " " " " " " " " "	9
II - THEORIE DU BETATRON A CHAMP AZIMUTAL " " " " " " " " " "	22
III - ETUDE EXPERIMENTALE DE L'INJECTION PAR CHAMPS	
CROISES	42
CONCLUSION	60
APPENDICE - Calcul d'un bobinage de champ	
azimutal pulsé	61

Etude Théorique et Expérimentale d'une Injection
par Champs Croisés dans un Bétatron à Air

P. GRATREAU

INTRODUCTION

En liaison avec les recherches de Physique des Hautes Energies, la technique des accélérateurs s'oriente actuellement dans deux directions principales: d'une part, l'étude de très grosses machines qui seraient une extrapolation des synchrotrons à protons existants; d'autre part, en vue d'expériences de faisceaux croisés, la réalisation d'anneaux de stockage où les protons seraient accumulés après accélération.

En ce qui concerne les accélérateurs d'électrons de faible et moyenne énergie, il est aussi d'un grand intérêt d'accroître l'intensité des faisceaux, ce qui conduit en particulier à reconsidérer le problème de l'injection dans le bétatron. Une telle source de rayonnement contrôlé à haute intensité serait en effet fort utile dans la thérapeutique et l'industrie. Il n'est pas exclu en outre que les travaux réalisés dans ce domaine puissent contribuer aux recherches visant à déterminer des principes nouveaux pour les accélérateurs de haute énergie, tel le guidage de particules lourdes par un faisceau stabilisé dense d'électrons¹⁾.

Le procédé d'injection dans lequel on part d'un plasma obtenu par ionisation préalable du gaz résiduel de la chambre d'accélération n'a pas donné jusqu'à présent, pour des raisons d'instabilité, de résultats suffisamment encourageants²⁾ pour qu'on ne tente pas de revenir à des procédés plus classiques, où les électrons sont émis par un canon. La neutralisation ultérieure éventuelle du faisceau n'entraîne plus alors, au-delà d'une certaine énergie, la même instabilité que dans le bétatron à plasma³⁾.

Les recherches relatives aux bétatrons "conventionnels" qui ont été effectuées jusqu'à ce jour^{4,5)} tendaient à accroître l'intensité

du faisceau grâce à une meilleure compréhension du processus d'injection. Elles ont confirmé qu'une capture collective d'origine à la fois électrostatique et électromagnétique permet l'injection de courants relativement élevés, de l'ordre de quelques dixièmes d'ampères, mais qui peuvent être difficilement dépassés.

Les recherches que nous avons entreprises au C.E.A., poursuivies au C.E.R.N. et achevées dans le cadre du C.N.R.S., se sont développées en deux temps:

1° Amélioration des caractéristiques actuelles des bétatrons par accroissement des dimensions de la chambre: un bobinage à air a été déterminé, qui présente un couplage optimum avec l'orbite d'équilibre et correspond à un "puits de potentiel" particulièrement large; les spires sont en effet disposées sur une surface torique enveloppant la chambre à vide, dont l'ouverture relative peut dépasser 0,4.

2° Mise au point d'un procédé d'injection totalement différent des procédés classiques et qui fait appel à un faible champ azimuthal, croisé avec un champ électrostatique sensiblement vertical: un glissement radial du faisceau en résulte, qui permet sa capture.

Cette étude comprend donc deux parties théoriques: la première établit les caractéristiques du bobinage en application directe de la notion de potentiel magnétique, qui est rappelée dans un paragraphe préliminaire relatif à la théorie générale du bétatron; la seconde partie développe la théorie du bétatron à champ azimuthal, telle qu'elle a été déjà esquissée⁶).

Une troisième partie décrit un montage expérimental réalisant l'injection par champs croisés. Elle expose les résultats d'expériences essentiellement démonstratives qui prouvent qu'on peut prendre en considération d'autres procédés d'injection que les procédés conventionnels.

RAPPELS SUR LA THEORIE GENERALE DU BETATRON

L'expression générale de l'hamiltonien d'une particule chargée dans un champ électromagnétique est, en coordonnées cylindriques :

$$H = c \left[\left(P_r - q A_r \right)^2 + \left(\frac{P_\Theta}{R} - q A_\Theta \right)^2 + \left(P_z - q A_z \right)^2 + m_r^2 c^2 \right]^{1/2} + q V \quad (1)$$

où l'on a :

q : charge algébrique de la particule

m_r : masse au repos

$\vec{P}(P_r, P_\Theta, P_z)$: moment canonique défini par le premier groupe des équations d'Hamilton

$\vec{A}(A_r, A_\Theta, A_z)$: potentiel-vecteur

V : potentiel électrostatique qui, en l'absence de champ appliqué, est le potentiel de charge d'espace; le premier terme de l'hamiltonien est l'énergie cinétique totale $m c^2$ de la particule.

La coordonnée Θ étant cyclique, le moment conjugué est une constante définie par les conditions initiales, d'où (intégrale de Störmer):

$$R(P_\Theta + q A_\Theta) = P_0 \quad (2)$$

où P_Θ est la composante azimutale du moment mécanique $\vec{p}(p_r, p_\Theta, p_z)$.

Le deuxième groupe des équations d'Hamilton conduit naturellement à l'équation de Lorentz; on est amené à poser, en l'absence de champ azimutal ($A_r = A_z = 0$; $A_\Theta = A$) :

$$U = A - \frac{P_0}{qR} \quad (3)$$

Le vecteur $\vec{U}(0, U, 0)$ est encore un potentiel-vecteur qui satisfait aux relations:

$$\mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{U}} = 0$$

et

$$\Delta U - \frac{U}{R^2} = 0 \quad (4)$$

soit

$$\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{v} \times \vec{\mathbf{U}}$$

($\vec{\mathbf{B}}$: champ magnétique).

Bien que moins général que le potentiel A, puisqu'il est lié à la classe de particules de même constante P_0 , le potentiel U sera utilisé ici de préférence, du fait qu'il présente un minimum sur l'orbite instantanée; (1) s'écrit en effet:

$$H = c[q U^2 + p_r^2 + p_z^2 + m_r^2 c^2]^{1/2} + q V \quad (1')$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{dp_r}{dt} = - \frac{1}{2m} \frac{\partial}{\partial R} (q^2 U^2) - q \frac{\partial V}{\partial R} \\ \frac{dp_z}{dt} = - \frac{1}{2m} \frac{\partial}{\partial Z} (q^2 U^2) - q \frac{\partial V}{\partial Z} . \end{cases} \quad (5)$$

En l'absence de champ électrostatique, l'orbite d'équilibre instantanée, définie par la condition $dp_r/dt = 0$ dans le plan médian, est donc telle que:

$$\frac{\partial U}{\partial R} = 0 . \quad (6)$$

Le déplacement de cette orbite se déduit de (3) et l'on voit immédiatement qu'elle tend asymptotiquement, au cours de l'accélération, vers l'orbite d'équilibre théorique définie par:

$$\frac{\partial A}{\partial R} = 0 \quad (6')$$

relation qui n'est autre que la condition bétatron (dite 2/1); les particules théoriques sont alors telles que $P_0 = 0$.

Posons:

$$X = R - R_i \quad \left| \quad \begin{aligned} x &= \frac{X}{R_i} \\ z &= \frac{Z}{R_i} \end{aligned} \right.$$

où R_i est le rayon de l'orbite d'équilibre instantanée;

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{1}{U_i} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)_0 = - \frac{R_i}{B_i} \left(\frac{dB_z}{dR} \right)_{R=R_i} \\ s_i &= \frac{1}{U_i} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x \partial z^2} \right)_0 = - \frac{R_i^2}{B_i} \left(\frac{d^2 B_z}{dR^2} \right)_{R=R_i} \end{aligned} \quad (7)$$

où $U_i = U(0, 0)$; B_i est le champ sur l'orbite, et l'indice zéro indique que les dérivées sont prises pour $x = 0, z = 0$; n_i est l'indice sur l'orbite.

Le développement de U s'écrit, au troisième ordre, et compte tenu de (4):

$$U = U_i \left[1 + \frac{1-n_i}{2} x^2 + \frac{n_i}{2} z^2 - \frac{3-n_i+s_i}{6} x^3 + \frac{s_i}{2} x z^2 \right] \quad (8)$$

d'où la condition d'indice: $0 < n_i < 1$ pour que l'orbite d'équilibre soit stable.

Pour l'orbite d'équilibre théorique de rayon R_1 , de champ A_1/R_1 et d'indice n_1 , on a, avec $x = R - R_1/R_1$, $z = Z/R_1$:

$$A = A_1 \left[1 + \frac{1-n_1}{2} x^2 + \frac{n_1}{2} z^2 - \frac{3-n_1+s_1}{6} x^3 + \frac{s_1}{2} x z^2 \right]. \quad (8')$$

Si la masse peut être considérée comme constante au cours d'une révolution, c'est-à-dire si l'accélération est adiabatique (ce qui est très généralement le cas), il est commode d'introduire le potentiel magnétique^{7,8)}:

$$W = \frac{q U^2}{2m} \quad (9)$$

qui est tel qu'en régime permanent on ait la relation:

$$\frac{p_r^2 + p_z^2}{2m} + q(W + V) = \text{cte} .$$

Le mouvement de la particule est alors entièrement déterminé par le système:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_r}{dt} = - q \frac{\partial}{\partial R} (W + V) \\ P_\Theta + q U = 0 \\ \frac{dp_z}{dt} = - q \frac{\partial}{\partial Z} (W + V) \end{array} \right. \quad (S)$$

dont la deuxième équation est équivalente à (2).

On note que, pour un champ linéaire ($s_i \approx 0$), les équations du mouvement transversal sont découplées dans l'approximation du deuxième ordre, quel que soit le rayon de l'orbite d'équilibre instantanée; la trajectoire méridienne est alors une courbe de Lissajoux se déplaçant avec l'orbite.

Application du théorème adiabatique aux oscillations de grande amplitude

Si la particule est accélérée adiabatiquement en décrivant une spirale "tangente" à chaque instant à l'orbite d'équilibre, la deuxième équation du système (S) donne immédiatement la loi de variation de sa masse m_i par:

$$(m_i^2 - m_r^2) c^2 = q^2 U_i^2$$

où U_i est une fonction connue du temps; on déduit alors le mouvement azimutal.

Dans un bétatron à grande chambre, la particule peut effectuer initialement de larges oscillations autour de l'orbite d'équilibre. Au déplacement de l'orbite pendant l'injection s'ajoute alors un amortissement adiabatique des oscillations qui, pour un champ linéaire, se déduit du théorème de Liouville, du fait qu'on peut alors se placer dans un espace de phases à deux dimensions: x, p_x ou z, p_z . En désignant, d'une manière générale, par q et p les deux variables du plan des phases, où un système de particules peut être considéré comme un fluide, ce théorème s'exprime par l'invariant:

$$I = \oint p \, dq , \quad (10)$$

où l'intégrale est prise suivant un contour fermé intérieur au fluide, se déplaçant avec lui. Si alors on choisit pour contour la trajectoire, nécessairement fermée, que suivrait la particule si le système se trouvait instantanément "gelé", on déduit de (10) que l'aire du contour "tangent" que suit ultérieurement la particule après une accélération adiabatique est sensiblement conservée. En particulier, l'équation en Z étant ici linéaire, la trajectoire est une ellipse et l'on a:

$$\delta p_z \cdot \delta Z = \text{cte} ,$$

en désignant par δp_z et δZ les amplitudes maxima, soit, en divisant les deux membres par $p_{\odot i}$ (moment azimutal relatif à l'orbite de rayon R_i) et en posant $Q_{x_i}^2 = 1 - n_i$; $Q_{z_i}^2 = n_i$:

$$\frac{Q_{z_i}}{R_i} (\delta Z)^2 \sim \frac{1}{p_{\odot i}} ,$$

d'où

$$\delta Z \sim R_i^{1/2} (Q_{z_i} p_{\odot i})^{-1/2} .$$

De même, l'amortissement radial est donné dans l'approximation linéaire par:

$$\delta X \sim R_i^{1/2} (Q_{x_i} p_{\odot i})^{-1/2} .$$

Il pourrait être mis à profit dans un bétatron à air à gradient alterné^o), où seul le bobinage de focalisation forte serait pulsé et où l'injection serait effectuée à énergie constante.

Rappelons qu'on peut aussi tirer du théorème de Liouville la conservation adiabatique du moment magnétique d'une trajectoire circulaire dans un champ uniforme variable, propriété dont il sera fait usage dans le bétatron à champ azimutal croissant.

Du théorème adiabatique on peut tirer directement la loi de variation de la masse m , compte tenu des oscillations; on a, en effet, pour $p_r = p_z = 0$:

$$m^2 c^2 = q^2 U_1^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(Q_{x_1}^2 (\delta x)^2 + Q_{z_1}^2 (\delta z)^2 \right) \right] + m_r^2 c^2 .$$

Si l'on admet que les termes de couplage d'ordre supérieur entraînent l'équipartition de l'énergie transversale entre les directions radiale et verticale, on a:

$$Q_{x_1} \delta x = Q_{z_1} \delta z ,$$

d'où

$$(m^2 - m_1^2) c^2 = q^2 B_1^2 Q_{x_1}^2 (\delta X)^2 ,$$

soit

$$(m^2 - m_1^2) c^2 = - q B_1 Q_{x_1} \cdot m_0 \omega_0 Q_{x_0} (\delta X)_0^2 ,$$

où l'indice zéro est relatif aux conditions initiales, B_1 et Q_1 étant des fonctions connues du temps.

La première et la troisième équation du système (S), dans lesquelles le potentiel W est devenu une fonction connue du temps, permettent alors de déterminer le glissement des fréquences bétatron en fonction de l'amplitude, soit par des intégrales elliptiques, soit par des développements en série de cosinus de Fourier. La deuxième équation donne ensuite le mouvement azimutal.

PREMIERE PARTIE

DETERMINATION D'UN BETATRON A AIR

La notion de potentiel magnétique suggère une méthode très générale de détermination d'un bobinage bétatron, du fait que le potentiel A doit présenter un minimum sur l'orbite d'équilibre théorique et que les courbes $A = \text{cte}$ du plan méridien sont des équipotentiellles W . Cette méthode consiste à résoudre l'équation:

$$\Delta A - \frac{A}{R^2} = 0 \quad (11)$$

en séparant les variables dans le système de coordonnées toroïdales (ξ, η) défini par:

$$R = \frac{R_2 \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \quad ; \quad Z = \frac{R_2 \sin \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}$$

et en imposant la condition aux limites $A = \text{cte}$ sur un cercle (K) du plan méridien, d'équation $\xi = \text{cte}$. L'équation (11) n'étant autre qu'une équation de Poisson avec l'identification:

$$A \rightarrow V$$

$$\frac{A}{R^2} \rightarrow - \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

qui entraîne: $\rho V < 0$, le potentiel A présente nécessairement un minimum à l'intérieur du cercle (K) et l'indice sur l'orbite est certainement voisin de $1/2$. L'équation (11) admet deux solutions, exprimées en fonction des polynômes de Legendre, valables respectivement à l'intérieur et à l'extérieur du cercle (K), soit A_i et A_e ; la distribution de courant sur ce cercle, définie par:

$$\mu_0 j = \left(\frac{\partial A_i}{\partial n} \right)_{\xi} - \left(\frac{\partial A_e}{\partial n} \right)_{\xi},$$

où $\partial/\partial n$ est la dérivée normale, détermine le pas d'un bobinage toroïdal dont le contour épouserait exactement celui de la chambre et qui présenterait par conséquent un couplage optimum avec l'orbite d'équilibre.

Une méthode élémentaire beaucoup plus simple consiste à déterminer sur un cercle (K) une distribution de courant telle que la trace méridienne de l'orbite d'équilibre soit exactement le centre $\Omega_1 (R_1 = R_2, Z = 0)$ des coordonnées toroïdales, où l'indice est encore voisin de $1/2$; le cercle (K) n'est plus alors une courbe $A = \text{cte}$, mais il en diffère peu.

Considérons le potentiel a_1 créé en Ω_1 par une spire parcourue par un courant i dont la trace méridienne $M(R, Z)$ est sur un cercle (K):

$$a_1 = \frac{\mu_0 i}{\pi} \sqrt{\frac{R}{R_1}} \alpha(k) \quad (12)$$

où k est relié à ξ par la relation:

$$k^2 = \frac{4R_1 R}{(R_1 + R)^2 + Z^2} = \frac{2}{1 + \coth^2 \xi}$$

et où

$$\alpha(k) = \frac{1}{k} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) J_1(k^2) - J_2(k^2) \right],$$

(J_1 et J_2 respectivement intégrales elliptiques de première et deuxième espèces).

La dérivée radiale de (12) en Ω_1 est (pour $R_1 = 1$)⁹ :

$$\left(\frac{da_1}{dR_1} \right)_{R_1=1} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left[\frac{a}{R^{1/2}} - b R^{1/2} \right]$$

avec:

$$a = k^3 \frac{d\alpha}{dk}$$

$$b = 2 \left[k \left(1 - \frac{k^2}{2} \right) \frac{d\alpha}{dk} - \alpha \right]$$

et:

$$\frac{d\alpha}{dk} = \frac{1}{k^2} \left[-J_1(k^2) + \frac{1 - \frac{k^2}{2}}{1 - k^2} J_2(k^2) \right].$$

Un ensemble de quatre spires parcourues par le même courant, et dont les traces méridiennes, situées sur un cercle (K), sont symétriquement disposées par rapport au plan médian en $M'(R', \pm Z')$ et $M''(R'', \pm Z'')$ engendre donc en Ω_1 un potentiel $A_1 = 2(\alpha'_1 + \alpha''_1)$ de dérivée radiale nulle si:

$$R' R'' = \left(\frac{a}{b} \right)^2 R_1^2. \quad (13)$$

Une valeur particulière k^* de k est mise en évidence, pour laquelle $a = b$.

On trouve ^{o)}:

$k^* = 0,963$
$\alpha^* = \alpha(k^*) = 0,396$
$a^* = b^* = 5,025$
$\frac{R^*}{R_1} = 1,158$
$\frac{\rho^*}{R_1} = 0,583$

où R^* et ρ^* sont respectivement l'abscisse du centre et le rayon du cercle (K^*). On remarque que $R^* \neq 2\rho^*$.

o) Calculs effectués au CERN.

Les spires sont alors disposées comme l'indique le croquis 1, qui montre la possibilité de multiplier indéfiniment le nombre des spires de manière que leurs traces méridiennes soient distribuées uniformément sur tout le cercle (K^*), et tout en assurant la permanence de la condition 2/1 en Ω_1 .

Cette disposition de spires permet d'assurer en outre la condition d'indice ou, plus généralement, l'uniformité du puits de potentiel autour de l'orbite d'équilibre, de sorte que le cercle (K^*) diffère peu d'une courbe $A = \text{cte}$ du plan méridien.

On peut alors, sans entrer dans le détail du calcul du bobinage, évaluer avec une bonne précision l'inductance mutuelle qu'il présente avec l'orbite d'équilibre théorique, ainsi que son inductance propre.

Inductance mutuelle présentée avec l'orbite d'équilibre

Pour un bobinage constitué de N spires, la relation (12) donne, avec $R = R_1$, $k = k^*$:

$$A_1 \approx \frac{\mu_0}{\pi} \alpha^* N i \quad (14)$$

où A_1 est le potentiel-vecteur total en Ω_1 , d'où la mutuelle par unité de longueur d'orbite d'équilibre:

$$m = \frac{\mu_0}{\pi} \alpha^* N$$

$$m = 0,158 N \text{ } (\mu\text{H})$$

qui conduit, à 1% près, aux valeurs effectivement calculées.

Energie et inductance propre

De l'expression générale de l'énergie magnétique:

$$E = \frac{1}{2} \int A_j dv$$

où dv est l'élément de volume, on tire, pour le bobinage considéré, en posant $N = 4p$:

$$E \approx \frac{\bar{A}^*}{2} \sum_1^p 4\pi (R' + R'') i$$

où $\sum$ désigne une sommation par rapport aux bétatrons à quatre spires qui ont été définis avec:

$$R_1 \leq \frac{R' + R''}{2} \leq R^*$$

et où $\bar{A}^*$ est la valeur moyenne de A sur le cercle (K^*) .

En prenant, avec une bonne approximation, la valeur moyenne $(R' + R'')/2$ telle que:

$$\frac{\overline{R' + R''}}{2R_1} - 1 \approx \frac{1}{2} \left(\frac{R^*}{R_1} - 1 \right),$$

il vient:

$$E \approx 2\pi R_1 \cdot \frac{A_1}{2} \left(\frac{\overline{R' + R''}}{2R_1} \cdot \frac{\bar{A}^*}{A_1} \right) Ni, \quad (15)$$

avec:

$$\frac{\overline{R' + R''}}{2R_1} \approx 1,08.$$

Evaluons la profondeur relative $\bar{A}^*/A_1$ du puits de potentiel A .

Pour la détermination de l'énergie du bobinage, on peut admettre le développement suivant de A :

$$A = A_1 \left\{ 1 + \frac{1}{2} [(1 - n_1) x^2 + n_1 z^2] [1 - \lambda x] \right\}$$

qui revient à poser:

$$s_1 = - \frac{n_1 (3 - n_1)}{3 - 2n_1}$$

soit:

$$\lambda = \frac{3 - n_1}{3 - 2n_1}$$

On peut alors écrire, au quatrième ordre près:

$$(1 - n_1) x^2 + n_1 z^2 = 2 \left(\frac{A}{A_1} - 1 \right) (1 + \lambda x) .$$

Pour $n_1 = 1/2$, on a donc l'équation d'un cercle (C) à point de Poncelet Ω_1 , d'axe radical la droite d'équation $R = 0,2$ ($\lambda = 5/4$). Si l'on note que l'équation d'un cercle (K) s'écrit:

$$\frac{1}{2}(x^2 + z^2) = 2 \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right) (1 + x) ,$$

on voit que, pour:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{1}{k^2}$$

les cercles (C) et (K) se coupent sur la verticale de l'orbite d'équilibre ($x = 0$). On peut alors admettre qu'une bonne approximation consiste à poser:

$$\frac{\overline{A^*}}{A_1} \# \frac{1}{(k^*)^2}$$

soit:

$$\frac{\overline{A^*}}{A_1} \# 1,08 .$$

De (14) et (15) on tire l'énergie et l'inductance propre par unité de longueur d'orbite d'équilibre:

$$\mathcal{E} \# \frac{1}{2} 0,19 N^2 i^2 \cdot 10^{-6} \quad (J)$$

$$\ell \# 0,19 N^2 \quad (\mu H)$$

d'où le coefficient de couplage:

$$\frac{\ell}{M} \# 1,18 N .$$

Ces résultats sont environ 3% inférieurs à ceux donnés par la mesure directe. Ils prouvent ainsi l'intérêt de la méthode utilisée pour le calcul simplifié de l'inductance.

Calcul du bobinage

On s'impose de distribuer les spires de manière que leurs traces méridiennes soient à l'intersection du cercle (K^*) et des droites d'un faisceau de sommet Ω_1 régulièrement disposées autour du sommet (croquis 2), quitte à vérifier ensuite que l'indice est bien voisin de $1/2$ en Ω_1 .

La dérivée seconde de (12) par rapport à Z est, en Ω_1 (pour $R_1 = 1$):

$$\left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial Z^2} \right)_{\substack{R_1=1 \\ Z=0}} = - \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left[c \left(R^{-3/2} + R^{1/2} \right) - d R^{-1/2} \right]$$

avec:

$$c = \frac{k^5}{4} \left(k \frac{d^2 \alpha}{dk^2} + 3 \frac{d\alpha}{dk} \right)$$

$$d = k^3 \left[\frac{k^3}{2} \left(\frac{2}{k^2} - 1 \right) \frac{d^2 \alpha}{dk^2} + \left(2 - \frac{3k^2}{2} \right) \frac{d\alpha}{dk} \right]$$

et:

$$\frac{d^2 \alpha}{dk^2} = \frac{1}{2k(1-k^2)} \left\{ - \left(5 - \frac{4}{k^2} \right) J_1(k^2) + \frac{7+k^2-\frac{4}{k^2}}{1-k^2} J_2(k^2) \right\}$$

Les spires étant parcourues par le même courant, l'indice sur l'orbite d'équilibre est donné (pour $R_1 = 1$) par:

$$n = \left[\frac{\sum \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2}}{\sum a_1} \right]_{\substack{R_1=1 \\ Z=0}} = \frac{d^* \sum R^{-1/2} - c^* \sum (R^{-3/2} + R^{1/2})}{4\alpha^* \sum R^{1/2}} \quad (16)$$

où $\sum$ indique une sommation par rapport à l'ensemble des spires avec:

$$\left| \begin{array}{l} c^* = 37,723 \\ d^* = 82,311 \end{array} \right.$$

En particulier, pour un bobinage à quatre spires, la relation (16), rendue homogène, se réduit à:

$$n = \frac{d^* R_1 - c^* (R' + R'')}{4\alpha^* R_1}$$

d'où, pour les cas extrêmes, des couples de spires tels que:

$$- \quad R' + R'' = 2R_1 \quad n = 4,335$$

$$- \quad R' + R'' = 2R^* \quad n = -3,173$$

et, pour le bobinage à quatre spires obtenu en les associant (croquis 3):

$$n = n_m = 0,512 .$$

De même, le bobinage à quatre spires obtenu à partir de droites inclinées à $\pi/4$ sur les axes (croquis 4) a pour indice:

$$n = n_M = 0,571 .$$

On voit alors qu'on peut définir une famille de bobinages à huit spires, qu'on appellera "bétatrons élémentaires" possédant la propriété d'avoir tous un indice compris entre n_m et n_M , en associant deux bobinages à quatre spires d'indices voisins de $1/2 + \nu$ et $1/2 - \nu$, avec $\nu < 3,5$ environ: il suffit de déterminer ces derniers à partir de droites inclinées du même angle respectivement par rapport aux axes $O R$ et $O Z$ (croquis 5).

Les bétatrons élémentaires ayant en outre des inductances propres voisines, il résulte de la propriété précédente, ainsi qu'on l'a vérifié par une mesure, qu'ils peuvent être couplés en parallèle (et non en série), ce qui permet d'obtenir le bobinage désiré et de garder un bon rapport de couplage malgré la multiplication des spires.

Pratiquement, il n'y a pas intérêt à associer plus de trois bétatrons élémentaires. C'est ainsi que le bobinage réalisé est constitué de trois bétatrons élémentaires numérotés 1, 2 et 3 sur le dessin d'ensemble 2.

Les inductances mutuelles qu'ils présentent avec l'orbite d'équilibre, et les indices sur celle-ci sont:

$$m_1 = 1,2915 \text{ } \mu\text{H} \quad ; \quad n_1 = 0,513$$

$$m_2 = 1,2914 \text{ } \mu\text{H} \quad ; \quad n_2 = 0,546$$

$$m_3 = 1,2916 \text{ } \mu\text{H} \quad ; \quad n_3 = 0,576 .$$

L'indice présenté par l'ensemble des bobinages mis en série est:

$$n = 0,544 .$$

Le puits de potentiel-vecteur est représenté, pour le bétatron élémentaire 2. et pour le bétatron à 24 spires (Fig. 1), montrant ainsi le gain de largeur obtenu par multiplication du nombre des spires ⁰⁾. On trouve que l'indice croît de 0,5 à 0,6 lorsque le rayon varie de 0,6 R₁ à 1,7 R₁.

Relations caractéristiques des bétatrons à air - Comparaison avec les bétatrons à fer

Exprimons, en fonction de l'énergie des particules accélérées, l'énergie magnétique et le courant d'alimentation d'un bobinage bétatron à couplage optimum. Si l'énergie des particules dépasse plusieurs MeV, on lui associera dans la pratique un bobinage de champ de guidage découplé, alimenté en régime permanent (ou quasi-statique); on pourra ainsi utiliser toute la demi-période et réduire d'un facteur 4 les énergies stockée et dissipée dans le bobinage H.F. Compte tenu de la relation ultrarelativiste:

$$mc + q A_1 = 0 ,$$

qui s'écrit, en posant $mc^2 = -qV$:

$$A_1 = \frac{V}{c} ,$$

on tire de (14) et (15) la relation entre, d'une part l'énergie des particules (exprimée en MeV), d'autre part l'énergie magnétique (en Joules) par unité de longueur d'orbite d'équilibre:

$$\mathcal{E}_{(J)} \approx 10 V_{(MeV)}^2$$

0) Calculs effectués au C.E.A.

et le courant d'alimentation d'un bétatron élémentaire (ou le courant total pour plusieurs bétatrons élémentaires en parallèle)

$$I_{(A)} = 1.300 V_{(MeV)} \quad .$$

Pour établir la relation donnant l'énergie magnétique d'un bétatron à fer équivalent, on partira d'une forme théorique de pièces polaires correspondant à un indice 1 constituées de deux cônes faisant entre eux un angle de $\pi/3$, les rayons extrêmes de la chambre étant tels que (croquis 7):

$$\frac{R_m}{R_1} = 0,60 \quad ; \quad \frac{R_M}{R_1} = 1,75 \quad .$$

Si l'appareil est à entrefer, on peut considérer que celui-ci est constant et égal à $h = R_m \operatorname{tg} \pi/6$; la loi du champ dans la chambre peut d'autre part être assimilée à:

$$B = \frac{A_1}{\mathcal{R} \cos \Theta}$$

où $\mathcal{R}$ est la distance à l'origine et Θ l'angle du rayon-vecteur avec le plan médian. Le courant Ni total dans les N spires est tel que:

$$\mu_0 Ni = 2 \int_0^{\pi/6} B \mathcal{R} d\Theta$$

d'où:

$$A_1 \neq 2\mu_0 Ni$$

et la mutuelle par unité de longueur d'orbite:

$$m' \neq 2,5 N \quad (\mu H) \quad .$$

Les énergies respectives dans l'entrefer et la chambre sont:

$$2\pi R_1 \mathcal{E}'_1 = \pi R_m^2 h \cdot \frac{\left(\frac{2A_1}{R_m}\right)^2}{2\mu_0} \simeq \frac{2\pi}{1,7\mu_0} R_m A_1^2$$

$$2\pi R_1 \mathcal{E}'_2 = \pi(R_M - R_m)A_1 \cdot \frac{A_1}{2\mu_0} = \frac{\pi}{2\mu_0} (R_M - R_m)A_1^2$$

d'où l'énergie totale par unité de longueur d'orbite d'équilibre:

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2 = 5 \cdot 10^5 A_1^2 .$$

Pour un appareil sans entrefer utilisant toute la demi-période, on aurait:

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}_2 \neq 2,5 \cdot 10^5 A_1^2 .$$

Ces évaluations sont d'ailleurs optimistes car on a négligé l'énergie du circuit magnétique et celle du champ de fuite inévitable, qui peuvent être du même ordre, et l'on admettra les valeurs respectives suivantes de $\mathcal{E}'$ (exprimée en Joules) en fonction de l'énergie des particules (en MeV):

$$10 V^2_{(\text{MeV})} \quad . \quad \text{et} \quad 5 V^2_{(\text{MeV})} .$$

A dimensions égales, et pour le fonctionnement en 1/4 de période et en 1/2 période, l'appareil à air demanderait des énergies égales respectivement à 4 fois et 2 fois celle de l'appareil à fer. Mais le champ de l'appareil à air n'est pas limité par le phénomène de saturation du fer, et il se prête beaucoup mieux à l'application des procédés d'injection non conventionnels. Pour des dimensions réduites, par exemple, au 1/3 de celles de l'appareil à fer, il y aurait donc sensiblement équivalence quant aux énergies stockées.

En ce qui concerne les pertes, l'énergie dissipée par période T est:

$$P \times T = \frac{2\pi E}{Q}$$

où E est l'énergie stockée dans la batterie de condensateurs. Cette relation est favorable au bobinage à air, dont la surtension Q est élevée, même en tenant compte des pertes dans les connexions entre le bobinage et la batterie. En régime permanent, l'intensité moyenne peut être, en raison de la fréquence élevée, de l'ordre de celle de l'accélérateur linéaire; mais l'énergie peut difficilement dépasser 10 MeV du fait des pertes importantes.

Dans un fonctionnement en régime pulsé, où l'on peut parfois utiliser plusieurs périodes à chaque décharge oscillante, l'énergie ne dépend que de la batterie de condensateurs disponible. L'intensité crête étant beaucoup plus élevée que dans le bétatron à fer, le courant moyen peut être du même ordre, pour un encombrement et un poids de l'appareil moindres.

A titre d'exemple, on peut faire la comparaison suivante:

- 1) - Bétatron à air (et noyau de fer) de 10 MeV et 8 cm de rayon d'orbite d'équilibre des Laboratoires Philips¹⁰):
 - courant crête relativement élevé
 - énergie stockée = 8 kJ (batterie de 6,5 μ F à 50 kV)
 - fréquence = 2,5 kHz avec un taux de répétition de 6 par seconde
- 2) - Bétatron à air de 10 MeV à couplage optimum et 8 cm de rayon d'orbite d'équilibre (bobinage à 8 spires):
 - courant crête supérieur au précédent
 - énergie stockée = 2,2 kJ (batterie de 7,2 F à 25 kV), soit 15 condensateurs Bosch de 0,5 μ F)
 - Fréquence = 25 kHz (L = 7 μ H); avec un taux de répétition de 10 par seconde les pertes sont de 22 kW, énergie facile à évacuer. Cet appareil a été effectivement réalisé (photos 6 et 7) en vue d'études sur les bétatrons à plasma, mais il n'a pas été conçu pour un fonctionnement continu.

DEUXIEME PARTIE

THEORIE DU BETATRON A CHAMP AZIMUTAL

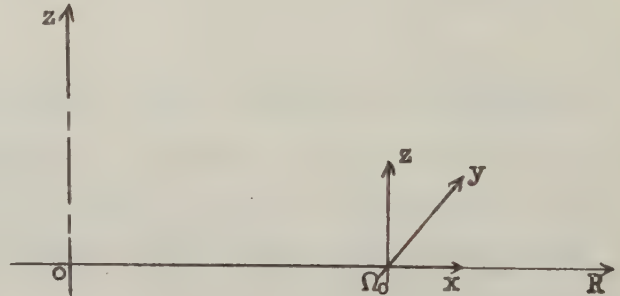
Le champ de guidage et aussi, en général, le champ azimuthal, sont supposés constants.

Soit Ω_0 la trace de l'orbite d'équilibre, de rayon R_0 , dans le plan méridien de la particule; on prend comme repère le trièdre tri-rectangle $\Omega_0 XYZ$, l'axe $\Omega_0 X$ étant porté par le rayon vecteur Ω_0 et dirigé dans le même sens, et l'axe $\Omega_0 Z$ étant parallèle à l'axe de révolution des champs.

(figure ci-contre)

On pose:

$$X = R - R_0 \quad \left| \quad \begin{aligned} x &= \frac{X}{R_0} \\ z &= \frac{Z}{R_0} \end{aligned} \right.$$



Soit B_z le champ de guidage dans le plan médian, B_0 sa valeur sur l'orbite; on peut admettre, sans restreindre la généralité du raisonnement, la loi de variation linéaire suivante:

$$B_z = B_0(1 - nx)$$

où l'indice n est tel que $0 \leq n \leq 1$. On pose:

$$\omega_0 = - \frac{q B_0}{m}$$

où q est la charge algébrique de la particule.

Soit B_Θ le champ azimuthal, B_c sa valeur sur l'orbite:

$$B_\Theta = B_c \frac{R_0}{R} \simeq B_c(1 - x) .$$

On pose encore :

$$\omega_c = - \frac{q B_0}{m} .$$

Les équations du mouvement de la particule sont, au deuxième ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = - \omega_0^2 \left[(1-n)x - \frac{3-n}{2} x^2 \right] + \omega_c (1-x) \dot{z} \\ \ddot{z} = - \omega_0^2 n z - \omega_c (1-x) \dot{x} \end{array} \right.$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} + \omega_0^2 (1-n)x - \omega_c \dot{z} = \frac{3-n}{2} \omega_0^2 x^2 - \omega_c x \dot{z} \\ \ddot{z} + \omega_0^2 n z + \omega_c \dot{x} = \omega_c x \dot{z} \end{array} \right. \quad (I)$$

Théorie linéaire

Dans l'approximation linéaire, le système (I) se présente comme un système d'équations linéaires homogènes; il est alors plus commode de prendre la coordonnée azimutale Θ comme variable indépendante et de poser :

$$\lambda = \frac{\omega_c}{\omega_0} .$$

Le système (I) s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' + (1-n)x - \lambda z' = 0 \\ z'' + n z + \lambda x' = 0 \end{array} \right. \quad (II)$$

système dont la solution imaginaire est la somme de quatre solutions particulières de la forme :

$$\begin{cases} x = a e^{j S \Theta} \\ z = b e^{j S \Theta} \end{cases}$$

avec, en posant $S \Theta = \omega t$:

$$S = \frac{\omega}{\omega_0} .$$

Le système (II) s'écrit alors:

$$\begin{cases} a [(1-n) - S^2] - j b \lambda S = 0 \\ j a \lambda S + b (n - S^2) = 0 \end{cases} \quad (\text{III})$$

dont le déterminant Δ doit être nul, d'où:

$$\Delta = [(1-n) - S^2][n - S^2] - \lambda^2 S^2 = 0 ,$$

soit:

$$S^4 - (1 + \lambda^2) S^2 + n(1-n) = 0 . \quad (17)$$

Pour $\lambda \neq 0$, l'équation résolvante admet les deux racines positives:

$$S^2 = \frac{1}{2} \left\{ (1 + \lambda^2) \pm [(1 + \lambda^2)^2 - 4n(1-n)]^{1/2} \right\} , \quad (18)$$

soit S_1^2 et S_2^2 ($S_1^2 < S_2^2$) .

La solution générale réelle du système (II) s'obtient en associant deux à deux des solutions imaginaires conjuguées, d'où:

$$\begin{cases} x = 2\text{Re} \{ a_1 e^{j S_1 \Theta} + a_2 e^{j S_2 \Theta} \} \\ z = 2\text{Re} \{ b_1 e^{j S_1 \Theta} + b_2 e^{j S_2 \Theta} \} \end{cases}$$

où Re désigne la partie réelle de la quantité entre parenthèses, avec, tiré de (III):

$$\frac{b_i}{j a_i} = \frac{S_i^2 - Q_x^2}{\lambda S_i} = \frac{\lambda S_i}{S_i^2 - Q_z^2} \quad (i = 1; 2) \quad (19)$$

où l'on note que $Q_x^2 = 1 - n$ et $Q_z^2 = n$ sont intérieurs à l'intervalle des racines de l'équation (17); en remarquant que deux valeurs opposées de S_i correspondent au même mouvement, on peut toujours choisir pour S_i , par convention, la solution dont le signe est celui du sens de rotation dans le système d'axes $\Omega_0 Z X$, ce qui revient à s'imposer $b_i/j a_i > 0$. On a alors:

$$S_1 S_2 = - Q_x Q_z$$

$$\lambda S_2 > 0$$

avec $S_2 \simeq \lambda$ pour λ infiniment grand.

Enfin, on tire de (19), en posant:

$$a_i = A_i e^{j \Phi_i} \quad ; \quad b_i = B_i e^{j(\Phi_i + \frac{\pi}{2})}$$

$$(A_i, B_i > 0 \quad ; \quad -\pi < \Phi_i < +\pi)$$

$$\left(\frac{B_i}{A_i}\right)^2 = \frac{S_i^2 - Q_x^2}{S_i^2 - Q_z^2} \quad (20)$$

Ainsi, le mouvement de la particule est-il la superposition de deux mouvements elliptiques de sens contraires, la fréquence la plus élevée étant équivalente à la fréquence cyclotron du champ azimuthal, lorsque celui-ci est grand par rapport au champ de guidage.

Ces fréquences sont données par la relation (18) qu'on peut représenter par la courbe $|S|$ en fonction de $|\lambda|$; elles ont pour limites, pour un champ azimuthal tendant vers 0, les fréquences respectives des oscillations transversales découplées. Les paramètres des ellipses, donnés par la relation (20), sont des fonctions respectivement croissante et décroissante de $|S|$ suivant que l'indice est inférieur ou supérieur à $1/2$; ils peuvent être représentés sans ambiguïté par la courbe $|\text{Log } B/A|$ en fonction de $|\lambda|$ (dont la branche inférieure correspond à la fréquence la plus élevée), si l'on remarque que l'on a:

$$\frac{B_1}{A_1} > 1 \quad , \quad \frac{B_2}{A_2} < 1 \quad \text{pour} \quad n < \frac{1}{2}$$

$$\frac{B_1}{A_1} < 1 \quad , \quad \frac{B_2}{A_2} > 1 \quad \text{pour} \quad n > \frac{1}{2} .$$

De la relation

$$\frac{B_1}{A_1} \cdot \frac{B_2}{A_2} = \frac{Q_x}{Q_z} ,$$

facile à vérifier, on déduit que les deux branches de la courbe $|\text{Log } B/A|$ se déduisent l'une de l'autre par la translation $|\text{Log } Q_x/Q_z|$. Ces différentes courbes sont données dans la Fig. I. Notons que, pour un champ azimuthal élevé, l'ellipse décrite avec la fréquence supérieure s'identifie à un cercle alors que celle décrite avec la fréquence inférieure tend à se confondre avec une ellipse équipotentielle magnétique.

On a appelé Q_1, Q_2 les valeurs de Q_x, Q_z telles que $Q_1 \leq Q_2$ ($Q_1 = Q_2 = 1/\sqrt{2}$ pour $n = 1/2$) et tracé les courbes $|S|$ et $|\text{Log } B/A|$ pour quelques couples n_1, n_2 de l'indice, tels que:

$$n_1 + n_2 = 1 \quad (\text{avec } 0 \leq n_1 \leq \frac{1}{2} \leq n_2 \leq 1) .$$

Pour $n = 1/2$ les ellipses se réduisent à des cercles de rayons ρ_1 et ρ_2 , quelle que soit la valeur du champ azimuthal, et l'on est ramené, pour le mouvement dans le plan méridien, à un problème à symétrie de révolution, ce qui rend possible l'étude en régime variable qui est faite plus loin. On a:

$$S_0^2 = \frac{1}{2} \left\{ (1 + \lambda^2) \pm \lambda(2 + \lambda^2)^{1/2} \right\}$$

avec

$$S_0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq \pm \frac{|\lambda|}{2} \text{ quand } \lambda \text{ tend vers } 0.$$

Pour $n \neq 1/2$, on a, quand λ tend vers 0 :

$$|S_2| - Q_2 \simeq \frac{Q_2}{2(Q_2 - Q_1)} \lambda^2$$

$$Q_1 - |S_1| \simeq \frac{Q_1}{2(Q_2 - Q_1)} \lambda^2$$

et, pour λ tendant vers l'infini:

$$|S_2| \simeq |\lambda| \left\{ 1 + \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1 + 4Q_1^2 Q_2^2}{8\lambda^4} \right\}$$

$$|S_1| \simeq \frac{Q_1 Q_2}{|\lambda|} \left\{ 1 - \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{3 + 4Q_1^2 Q_2^2}{8\lambda^4} \right\}.$$

Les deux branches de la courbe tendent asymptotiquement vers les branches correspondantes de la courbe $|S_0|$. De même:

$$\left| \text{Log } \frac{B_2}{A_2} \right| = \left| \text{Log } \frac{B_1}{A_1} \right| - \text{Log } \frac{Q_2}{Q_1} \simeq \frac{Q_2^2 - Q_1^2}{2\lambda^2},$$

soit, dans tous les cas:

$$\frac{B_2}{A_2} \simeq 1 - \frac{1-n}{\lambda^2} \quad ; \quad \frac{B_1}{A_1} \simeq \frac{Q_x}{Q_z} \left[1 + \frac{1-n}{2\lambda^2} \right].$$

Pour $n_1 = 0$ ($n_2 = 1$) on a:

$$|S_2| = \sqrt{1 + \lambda^2} ; \quad S_1 = 0 .$$

On a d'autre part, pour $|\lambda| = Q_1 \cdot Q_2$ ($\leq 1/2$):

$$|S_2| = 1 ; \quad |S_1| = |\lambda|$$

$$\left| \log \frac{B_2}{A_2} \right| = \log \frac{Q_2}{Q_1} ; \quad \left| \log \frac{B_1}{A_1} \right| = 2 \log \frac{Q_2}{Q_1}$$

et l'on vérifie que la courbure de la branche $|S_1|$ est toujours positive: le point d'inflexion est situé dans l'angle compris entre la première bissectrice et l'axe des $|S|$.

La Fig. II indique l'allure des trajectoires que peut décrire une particule injectée en un point donné du plan médian, sans vitesse radiale, en fonction de sa vitesse verticale initiale V_{z0} ; le paramètre k' qui a été introduit est défini par:

$$V_{z0} = \omega_0 k' X_0 .$$

De même, on pose, dans le cas d'une vitesse transversale initiale quelconque:

$$V_{x0} = \omega_0 k'' X_0 .$$

Le mouvement est alors entièrement déterminé en fonction des conditions initiales k' , k'' , X_0 , $Z_0 = 0$ par les phases à l'origine Φ_1 et Φ_2 , et les axes A_1 et A_2 des ellipses. On trouve, tous calculs faits, en posant $\lambda > 0$:

$$\operatorname{tg} \Phi_1 = \frac{k'' \frac{B_2}{A_2}}{S_2 \frac{B_2}{A_2} + k'} ; \quad \operatorname{tg} \Phi_2 = - \frac{k'' \frac{B_1}{A_1}}{|S_1| \frac{B_1}{A_1} - k'} .$$

Les axes et les déterminations des phases à l'origine étant alors définis par:

$$\left| \begin{array}{l} A_1 \cos \Phi_1 = x_0 \frac{S_2 \frac{B_2}{A_2} + k'}{S_2 \frac{B_2}{A_2} + |S_1| \frac{B_1}{A_1}} \\ A_2 \cos \Phi_2 = x_0 \frac{|S_1| \frac{B_1}{A_1} - k'}{S_2 \frac{B_2}{A_2} + |S_1| \frac{B_1}{A_1}} \end{array} \right. .$$

Le cas où $k' = 0$, qui correspond à une injection dans le plan médian, donne pour les phases:

$$\operatorname{tg} \Phi_1 = \frac{k''}{S_2} \quad ; \quad \operatorname{tg} \Phi_2 = - \frac{k''}{|S_1|} .$$

Pour le canon utilisé, $k''x_0 \neq 1/10$ et x_0 peut être de l'ordre de $1/3$; on voit que Φ_1 reste faible, alors que Φ_2 peut tendre vers $\pm \pi/2$ pour un champ azimuthal élevé. Pour $x_0 = 0$, $\Phi_1 = -\Phi_2 = \pm \pi/2$ et $B_1 = B_2$.

Le cas où $k'' = 0$ correspond à une émission sans vitesse radiale; on a, en fonction du paramètre k' , les trois possibilités:

$$a) \quad \left| S_1 \right| \frac{B_1}{A_1} < k' \quad \left| \begin{array}{l} \Phi_1 = 0 \\ \Phi_2 = \pm \pi \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = A_1 \cos S_1 \ominus - A_2 \cos S_2 \ominus \\ z = -B_1 \sin S_1 \ominus + B_2 \sin S_2 \ominus \end{array} \right.$$

avec:

$$\left| \begin{array}{l} A_1 \sim S_2 \frac{B_2}{A_2} + k' \\ A_2 \sim k' - |S_1| \frac{B_1}{A_1} \end{array} \right. ;$$

$$b) \quad -S_2 \frac{B_2}{A_2} \leq k' \leq |S_1| \frac{B_1}{A_1} \quad \left| \begin{array}{l} \Phi_1 = 0 \\ \Phi_2 = \pm \pi \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = A_1 \cos S_1 \Theta + A_2 \cos S_2 \Theta \\ z = -B_1 \sin S_1 \Theta - B_2 \sin S_2 \Theta \end{array} \right.$$

avec:

$$\left| \begin{array}{l} A_1 \sim S_2 \frac{B_2}{A_2} + k' \\ A_2 \sim |S_1| \frac{B_1}{A_1} - k' \end{array} \right.$$

Pour $k' = 0$, $|S_1| B_1 = S_2 B_2$.

Pour $k' = - \frac{S_2 \frac{B_2}{A_2} - |S_1| \frac{B_1}{A_1}}{2}$, $A_1 = A_2$.

$$o) \quad k' < -S_2 \frac{B_2}{A_2} \quad \left| \begin{array}{l} \Phi_1 = \pm \pi \\ \Phi_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -A_1 \cos S_1 \Theta + A_2 \cos S_2 \Theta \\ z = B_1 \sin S_1 \Theta - B_2 \sin S_2 \Theta \end{array} \right.$$

avec:

$$\left| \begin{array}{l} A_1 \sim - \left(\frac{B_2}{A_2} S_2 + k' \right) \\ A_2 \sim \frac{B_1}{A_1} |S_1| - k' \end{array} \right.$$

Deux exemples vont permettre de préciser les différents mouvements possibles:

$$1^o) \quad \left| \begin{array}{l} \lambda = 1,5 \\ n = \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad (\text{Fig. II})$$

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{B_2}{A_2} = 1 ; \quad |S_1| = 0,28 ; \quad S_2 = 1,78 .$$

La périodicité Θ est définie par:

$$|S_1| \Theta = 2\pi - S_2 \Theta$$

soit:

$$\Theta = \frac{2\pi}{|S_1| + S_2} = 0,97 \pi \quad \left| \begin{array}{l} |S_1| \Theta = 0,27 \pi \\ S_2 \Theta = 1,73 \pi \end{array} \right.$$

Deux valeurs remarquables de k' , autre que $-S_2$ et $|S_1|$, correspondant à des épicycloïdes, sont telles que:

$$|S_1| A_1 = S_2 A_2 .$$

On trouve:

$$k' = 0$$

$$k' = \frac{1}{S_2 - |S_1|} = 0,66 .$$

Il existe 10 cas de figures qui ont été représentés pour les valeurs suivantes de k' (Fig. II):

$$1 ; \underline{0,66} ; 0,50 ; \underline{0,28} ; 0,10 ; \underline{0} ; -0,30 ; -1 ; \underline{-1,78} ; -3 .$$

Les valeurs soulignées en traits pleins correspondent à des cercles; pour la valeur $-1,78$, la vitesse initiale est légèrement supérieure à la vitesse cyclotron du champ azimuthal. Les valeurs soulignées en traits discontinus correspondent aux épicycloïdes; on peut alors considérer le mouvement comme décrit par un point de la circonférence d'un cercle de rayon A_2 roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon $A_1 + A_2$.

Dans l'expérience réalisée, les électrons émis dans l'axe du canon sont tels que $k' = 0$; ceux qui sont émis aux extrémités sont tels que $k' \gtrsim 0$ et $k' \lesssim 0$; ils décrivent des trochoïdes du type de celles représentées pour $k' = 0,10$ et $k' = -0,30$. Notons qu'on retrouve ces deux trochoïdes pour $k' = 0$, mais $n < 1/2$ et $n > 1/2$; on a représenté les cas $n_1 = 0,36$; $n_2 = 0,64$ (Fig. III; $|S_1| = 0,26$, $S_2 = 1,78$) et l'on voit qu'il ne peut y avoir d'autre point de rebroussement que si l'on a simultanément $S_1\Theta = K_1\pi$; $S_2\Theta = K_2\pi$ où K_1 et K_2 sont des entiers de même parité.

$$2^\circ) \quad \lambda = \sqrt{n_1(1-n_1)} = 0,48 \quad \text{pour } n_1 = 0,36 \quad (\text{Fig. IV})$$

$$n = n_1 = 0,36 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{B_1}{A_1} = \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2 = 1,77 \\ \frac{B_2}{A_2} = \frac{Q_2}{Q_1} = 0,75 \end{array} \right.$$

$$n = n_2 = 0,64 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{B_1}{A_1} = \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^2 = 0,56 \\ \frac{B_2}{A_2} = \frac{Q_1}{Q_2} = 1,33 \end{array} \right.$$

On a représenté sept cas de figures correspondant à des vitesses initiales régulièrement décroissantes.

Interprétation macroscopique du mouvement pour un champ azimuthal élevé (Approximation non linéaire).

Pour un champ azimuthal suffisamment élevé on a, quel que soit l'indice:

$$\begin{array}{ll} |S_1| \simeq \frac{Q_x Q_z}{|\lambda|} & \frac{B_1}{A_1} \simeq \frac{Q_x}{Q_z} \\ |S_2| \simeq |\lambda| & \frac{B_2}{A_2} \simeq 1 \end{array}$$

En posant:

$$x_{(1)} = A_1 \cos S_1 \Theta$$

$$z_{(1)} = - B_1 \sin S_1 \Theta$$

on a:

$$v_{(1)}^2 = \omega_b^2 (x_{(1)}'^2 + z_{(1)}'^2) \simeq \frac{\omega_0^2 R_0^2}{\lambda^2} \left[(1-n)^2 x_{(1)}^2 + n^2 z_{(1)}^2 \right] .$$

Pour $A_2 \ll A_1$, le mouvement moyen de la particule s'effectue suivant l'ellipse d'équation:

$$(1-n)(x^2 - x_0^2) + n z^2 = 0$$

avec la vitesse $v_{(1)}$.

Considérons alors la particule comme soumise aux champs croisés:

$$\left| \begin{array}{l} \vec{\mathcal{E}}_{\perp} = - \nabla W \\ B_{\Theta} \simeq B_c \end{array} \right.$$

où le potentiel magnétique qW , dont dérivent les forces de rappel vers l'orbite, est tel que: .

$$W = W_0 \left[1 + (1-n)x^2 + n z^2 - \left(1 - \frac{n}{3}\right) x^3 \right]$$

avec:

$$W_0 = \frac{m \omega_0^2 R_0^2}{2q} .$$

Dans la mesure où l'effet de courbure des équipotentiellles peut être négligé, le mouvement d'entraînement s'effectue suivant l'équipotentielle d'équation:

$$(1-n)(x^2 - x_0^2) + n z^2 - \left(1 - \frac{n}{3}\right)(x^3 - x_0^3) = 0$$

avec la vitesse¹¹⁾ :

$$v_g = - \frac{\nabla W}{B_0} \left\{ \frac{\omega_0 R_0}{\lambda} \left[(1-n)x - \frac{3}{2} n x^2 \right] + \frac{\omega_0 R_0}{\lambda} n z \right\} .$$

Dans l'approximation linéaire, on retrouve bien l'ellipse précédente décrite avec la vitesse $v_g = v_{(1)}$, et le degré de validité de cette interprétation peut être évalué d'après les développements de B_1/A_1 et $|S_1|$; en particulier, dans l'expérience réalisée, cette interprétation est toujours valable, sauf dans l'observation de la déformation du faisceau avec un champ azimuthal croissant à partir d'une valeur nulle.

La superposition d'un champ électrostatique $\vec{E}$ sensiblement vertical, dérivant d'un potentiel V (Fig. 2), conduit à une généralisation de cette interprétation; le glissement s'effectue suivant une équipotentielle $W+V = \text{cte}$ peu différente d'une équipotentielle $V = \text{cte}$, si la force électrostatique est grande par rapport à la force de rappel vers l'orbite, et avec une vitesse de glissement voisine de E/B_0 . Le procédé d'injection décrit dans la troisième partie de cette étude consiste à utiliser ce glissement pour éviter le canon au premier tour. La capture s'effectue au moment où le champ électrostatique est supprimé, de sorte que la particule poursuit son glissement suivant des équipotentielles $W = \text{cte}$ qui sont des courbes fermées entourant l'orbite d'équilibre. La forme à donner aux équipotentielles $V = \text{cte}$ doit favoriser au maximum le processus de capture; en particulier, l'adjonction d'une électrode neutre (Fig. 3), qui ralentit le glissement radial (mais fait apparaître un glissement vertical), permet une meilleure utilisation du volume de la chambre.

La valeur minimum du champ azimuthal est fixée par l'effet de confinement qu'il procure au faisceau et qui doit être suffisant pour éliminer pratiquement les pertes sur les parois et l'arrière du canon; la valeur de 100 Gs à laquelle on a fait correspondre un champ électrostatique de 200 V/cm donne un ordre de grandeur qui montre que ce champ est faible par rapport au champ de guidage en fin d'accélération et qu'il n'apporte par conséquent pas de réduction notable de la densité du faisceau

accélééré; quant à la dispersion d'énergie, elle est déterminée par la variation de flux que subit le faisceau circulaire au cours de son glissement radial pendant l'injection.

La substitution d'un champ électrique induit, dû à une variation rapide du champ azimuthal, au champ électrostatique peut permettre un glissement vers le centre de la chambre, qui est traité dans l'étude en régime variable faite plus loin.

Effet de non-uniformité du champ azimuthal

La variation radiale du champ azimuthal modifie le mouvement précédemment étudié. Si le champ azimuthal est suffisamment élevé, cette variation ne nécessite qu'une correction du second ordre, qui consiste en un glissement supplémentaire vertical de vitesse w_g , telle que¹¹⁾:

$$\frac{w_g}{v_{\perp}} = \frac{\rho_2}{2} \frac{\frac{dB_{\ominus}}{dR}}{B_{\ominus}}$$

où ρ_2 est le rayon du cercle auquel on peut assimiler l'ellipse de paramètre B_2/A_2 et $v_{\perp} \simeq \omega_0 \rho_2$ la vitesse dans le plan méridien; on a donc:

$$w_g \simeq \frac{\omega_c}{2R} \rho_2^2 .$$

Si $v_{\perp}$ est suffisamment élevée, on peut composer w_g avec la vitesse v_g , telle que:

$$v_g \simeq \frac{\omega_0}{2|\lambda|} \rho_1 .$$

On peut alors évaluer le glissement vertical ϵ que subit la particule au cours d'une demi-révolution autour de Ω_0 (ou Ω_1) dans le plan méridien (croquis 8):

$$\epsilon = \pi \rho_1 \frac{w}{v} \frac{g}{g} \simeq \pi \frac{(\lambda \rho_2)^2}{R_0},$$

soit:

$$\epsilon \simeq \pi R_0 \left(\frac{v_{\perp}}{v_{\Theta}} \right)^2.$$

Ainsi, pour $v_{\perp}/v_{\Theta} = 0,1$, correspondant à l'ouverture du canon, $\epsilon = 5$ mm.

Il faut toutefois remarquer que, bien que le glissement vertical soit toujours dans le même sens, la particule n'est pas perdue sur la paroi, mais est confinée sur une surface toroïdale comme dans un Stellerator; en particulier, si on ajuste les champs pour que la vitesse soit purement verticale en M_0 et M'_0 , la trajectoire admet elle-même $\Omega_0 X$ comme axe de symétrie. Cette remarque peut être mise à profit dans le premier des trois procédés d'injection proposés au paragraphe suivant.

Etude du cas $n = 1/2$ dans l'approximation rectiligne (Champ azimuthal variable),

Dans l'approximation linéaire, on peut, pour $n = 1/2$, ignorer la courbure de l'orbite d'équilibre et assimiler celle-ci à un axe $\Omega_0 z$ confondu avec $\Omega_0 Y$. La particule peut alors être considérée comme se mouvant dans un champ magnétique rectiligne $\mathcal{B}_z = B_0$ parallèle à l'axe et soumise à une force dérivant du potentiel qW , tel que:

$$W = W_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right]$$

avec:

$$W_0 = \frac{m \omega_0^2 R_0^2}{2q}$$

où r est la distance à l'axe de la particule.

Si l'on note que ce potentiel ne satisfait pas à l'équation de Laplace, mais est tel que:

$$\Delta W = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dW}{dr} \right) = \frac{m \omega_0^2}{q}$$

tout se passe comme s'il y avait au voisinage de l'axe une densité de charge uniforme $-\epsilon_0 q B_0^2/m$, d'où résulte une correspondance entre le problème posé et celui du mouvement d'une particule dans un faisceau rectiligne en équilibre de charge d'espace; en particulier, on pourra considérer comme "confinée" une particule injectée sans vitesse transversale initiale, et comme "défocalisée" une particule animée d'une vitesse initiale telle qu'elle décrive un cercle centré sur l'axe dans un sens opposé au sens de rotation cyclotron du champ azimuthal; s'il existe un effet de charge d'espace prépondérant, la particule "focalisée" tournera dans le sens cyclotron avec une vitesse angulaire légèrement supérieure à celle de Larmor.

Pour qu'en régime variable on puisse assimiler le champ azimuthal au champ axial B_z , il est nécessaire que le champ électrique induit soit nul sur l'orbite d'équilibre, et que les lignes de force du champ soient, en son voisinage, des cercles du plan méridien centrés sur elle; un bobinage de champ azimuthal satisfaisant à ces conditions aux limites a été déterminé en appendice (Fig. 4). L'approximation rectiligne fait alors correspondre à la variation du champ azimuthal dans le temps une variation axiale du champ B_z .

Soit $\mathcal{H} = (B_0/2)r$ le potentiel-vecteur dont dérive le champ B_z , φ l'angle polaire de la particule dans le plan perpendiculaire à l'axe, compté positivement dans le sens direct défini par l'axe $\Omega_0 z$, et v_φ sa vitesse azimuthale dans ce plan. L'intégrale de Störmer s'écrit:

$$m v_\varphi + q \mathcal{U} = 0$$

avec:

$$\mathcal{U} = \mathcal{H} - \frac{P_0}{qr}$$

où P_0 est une constante définie par les conditions initiales:

$$r_0 ; v_{\varphi_0} ; \mathcal{H}_0 = \frac{B}{2} \frac{c_0}{r_0} r_0 > 0 .$$

Dans son mouvement dans le plan méridien, la particule peut toujours être considérée comme soumise à deux forces dont l'une dérive du potentiel qW et l'autre du potentiel de Störmer¹²⁾ $q\mathcal{W}$ qui est tel que:

$$\mathcal{W} = \frac{q u^2}{2m} .$$

On peut alors définir un rayon r_1 pour lequel la particule de vitesse azimutale v_1 ne subit aucune force radiale par la relation:

$$\frac{d}{dr}(W + \mathcal{W}) = 0$$

soit:

$$\frac{q}{m} u \frac{du}{dr} + \frac{dW}{dr} = 0$$

ou:

$$\frac{q}{m} \left(\mathcal{H}^2 - \frac{P_0^2}{q^2 r^2} \right) + r \frac{dW}{dr} = 0 .$$

Cas $W = 0$ (pas de champ de guidage)

Pour $P_0 = 0$, soit $v_{\varphi_0} = q \mathcal{H}_0 / m$, la particule passe toujours par Ω_0 .

Pour $P_0 > 0$, on a nécessairement:

$$\mathcal{H}(r_1) - \frac{P_0}{q r_1} = 0$$

d'où: $r_1 \mathcal{H}(r_1) = \text{cte}$ et $v_1 = 0$.

Le cercle décrit par la particule n'entoure pas le point Ω_0 (ou Ω_1 , croquis 9) et le cercle de rayon r_1 varie de manière à englober un flux constant.

Pour $P_0 < 0$, on a nécessairement:

$$\mathcal{H}(r_1) + \frac{P_0}{q r_1} = 0$$

d'où encore $r_1 \mathcal{H}(r_1) = \text{cte}$, et la vitesse v_1 ne s'annule plus, mais passe seulement par un minimum. Le cercle décrit par la particule entoure le point Ω_0 (ou Ω_1) et le cercle de rayon r_1 , dont le croquis 10 donne la construction, varie encore de manière à englober un flux constant.

Cas $W \neq 0$

Il est commode d'introduire encore le paramètre k' en posant:

$$v_{\varphi_0} = -\omega_0 k' r_0$$

$$\lambda_0 = \frac{\omega_{c0}}{\omega_0}$$

d'où:

$$P_0 = \frac{1}{2} m \omega_0 r_0^2 (\lambda_0 - 2k') .$$

On trouve alors:

$$\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 = \frac{(\lambda_0 - 2k')^2}{\lambda^2 + 2}$$

$$v_1 = - \frac{\left(\frac{dW}{dr}\right)_{r=r_1}}{B_c (1 - \epsilon)}$$

avec:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{\lambda^2 + 2}}{\lambda}\right) .$$

Il est alors clair que v_1 est, lorsque le cercle décrit par la particule n'entoure pas le point Ω_0 , la vitesse d'entraînement $v_{(1)}$, équivalente à la vitesse de glissement macroscopique pour λ infiniment grand, et l'expression de S_1 qu'on en tire, soit:

$$S_1 = - \frac{1}{2\lambda(1-\epsilon)}$$

est bien celle précédemment calculée.

Pour $P_0 = 0$, la particule passe encore par Ω_0 .

Pour $P_0 \neq 0$, le rayon r_1 est identique pour des vitesses azimutales initiales, telles que:

$$k' = \frac{\lambda_0}{2} \pm k'_0$$

où k'_0 est une constante positive (en particulier pour $v_{\varphi_0} = 0$ et $v_{\varphi_0} = \omega_{c_0} r_0$), et l'on vérifie qu'en régime permanent ($\lambda = \lambda_0$) la particule décrit un cercle ($r_1 = r_0$) pour les valeurs de k' solutions de l'équation:

$$k'^2 - \lambda_0 k' - \frac{1}{2} = 0 ,$$

à laquelle se ramène bien, pour $S_0^2 = k'^2$, l'équation précédemment établie:

$$S_0^4 - (1 + \lambda^2) S_0^2 + \frac{1}{4} = 0 .$$

On a alors:

$$k'_0 = \frac{\sqrt{\lambda_0^2 + 2}}{2} .$$

Ainsi est-on ramené, dans le système d'entraînement, aux deux types de possibilités du cas $W = 0$, avec une loi de décroissance de r_1 , en fonction du champ azimutal, équivalente pour les fortes valeurs du champ.

Il faut noter que r_1 n'est exactement égal à ρ_1 que lorsque la particule décrit un cercle centré en Ω_0 ; quant à ρ_2 , la loi de variation est donnée, en régime lentement variable, par le théorème adiabatique qui indique que le flux englobé par le cercle de rayon ρ_2 est encore sensiblement constant. Ainsi, l'évaluation du déplacement

centripète résultant vers le centre de la chambre, qui serait dû à un accroissement de champ azimuthal, est-elle immédiate et montre-t-elle la possibilité de réaliser de cette manière l'injection d'un faisceau annulaire.

Un second procédé consisterait à injecter les particules dans le plan méridien, sans vitesse azimuthale et en l'absence de champ de guidage, de façon qu'elles décrivent une spirale rentrante autour de l'orbite d'équilibre, l'effet de non-uniformité du champ azimuthal étant compensé par l'application d'un champ électrostatique radial proportionnel. L'efficacité optimum est obtenue pour un champ double du champ initial, pour lequel la vitesse d'injection correspond à la fréquence de Larmor, et la charge du faisceau à la limite de charge d'espace.

Dans un troisième mode d'injection, on pourrait utiliser un canon à symétrie cylindrique, blindé magnétiquement par un cylindre conducteur suffisamment épais, injectant les particules azimuthalement au point du plan méridien de champ électrique induit nul: le faisceau présenterait alors une analogie évidente avec un faisceau rectiligne focalisé magnétiquement, le canon étant évité au premier tour par un processus de champs croisés.

Les études de charge d'espace relatives aux différents types de faisceaux ainsi établis ont été faites par ailleurs et ont montré l'intérêt présenté par l'emploi d'un champ azimuthal pour l'injection de courants élevés.

TROISIEME PARTIE

ETUDE EXPERIMENTALE DE L'INJECTION PAR CHAMPS CROISES

L'étude expérimentale a eu pour but de vérifier le principe de l'injection multitours d'un faisceau confiné par la méthode des champs croisés exposée précédemment.

Le faisceau, émis sur le bord extérieur de la chambre est confiné par un champ magnétique azimuthal quasi-statique. Un champ électrostatique permanent oblique est créé entre deux couches d'aquadag peintes sur la chambre à vide. Le faisceau est ainsi dévié vers l'intérieur de la chambre qu'il remplit après avoir effectué plusieurs tours. Quelques ordres de grandeur permettent de préciser les effets de confinement et de glissement:

Confinement -

- Energie d'injection = 10 kV
- Demi-angle d'ouverture du canon = 0,1 radian
- Champ azimuthal = 100 Gs.

On trouve un rayon de giration des électrons dans le plan méridien, inférieur à 4 mm.

Le croquis 11 montre que des électrons peuvent se déposer sur la paroi de la chambre s'ils sont émis avec une vitesse verticale suffisante par une extrémité du canon rectiligne, assez rapproché du bord extérieur. Si l'on évalue cette perte à 1% et si le faisceau n'effectue qu'un tour, la charge déposée sera équivalente à celle qu'il porte, du fait que la durée de l'impulsion du canon, de l'ordre de 1 μ s, est d'environ 100 fois la durée d'une révolution des électrons.

Cette charge peut avoir pour effet d'éloigner légèrement le faisceau de la paroi extérieure de la chambre.

Glissement -

- Champ électrique vertical appliqué: $E = 200$ V/cm correspondant à la tension $\mathcal{V} = \pm 1,6$ kV sur les couches d'aquadag. La vitesse de glissement est: $2 \cdot 10^6$ m/s, d'où un glissement de 20 mm après un tour.

Les couches d'aquadag ayant été, par commodité, peintes sur la surface extérieure de la chambre, on peut se demander dans quelle mesure la charge qui se dépose sur la surface intérieure ne réduirait pas le champ appliqué.

La capacité C mesurée entre les couches d'aquadag est de l'ordre de 30 pF, d'où la charge de 10^{-7} Cb déposée par effet de capacité.

Or, la charge injectée durant une révolution n'est, pour un faisceau de 100 mA, que de 10^{-9} Cb. Par contre, un effet de blindage important peut être obtenu du fait de l'émission thermique du canon pendant le chauffage du filament, qui dure plusieurs secondes; mais il n'intéresse que la région de la chambre voisine du canon, et il pourrait être supprimé en appliquant une impulsion de tension sur les couches d'aquadag. Un effet cumulatif a été constaté pour un taux de répétition de une impulsion toutes les 5 secondes. Un intervalle de 30 secondes entre les impulsions suffit pour que la charge déposée sur la paroi soit écoulée.

A. Description des montages

L'ensemble de l'appareil est représenté sur le dessin 2.

Bobinages

a) Le bobinage de champ de guidage est le bobinage à 24 spires calculé dans la première partie, réalisé pour une orbite d'équilibre de 167 mm de rayon, soit sensiblement 1 m de longueur, correspondant à la dimension de la chambre à vide disponible dans le commerce. Un support en araldite stratifiée a été moulé sur une forme en plâtre et 12 rainures ont été tournées dans chaque demi-coquille (photo 1) pour recevoir un fil de cuivre de 1 mm de diamètre. Le bobinage est assemblé avec précision par trois tirants filetés en plexiglas. Les sorties des trois bobinages élémentaires (dont une partie est visible sur la photo 3) sont décalées de 120° et reliées en série par des connexions au voisinage de l'axe. De nombreuses ouvertures sont pratiquées dans le support d'araldite pour les sorties radiales et verticales de la chambre à vide, ainsi que pour les observations visuelles.

Ce bobinage présente une inductance propre: $L = 120 \mu\text{H}$.

Son inductance mutuelle avec l'orbite d'équilibre est le triple de l'inductance mutuelle d'un bobinage élémentaire à 8 spires, soit: $M = 3,9 \mu\text{H}$.

b) Le bobinage de champ azimuthal (photo 3) est constitué par 32 spires de laiton ayant sensiblement la forme d'un carré de 30 cm de côté, montées sur deux plateaux de carton bakélinisé. Elles sont articulées sur le plateau inférieur de manière à permettre un démontage rapide; 32 points de soudure assurent, à la partie supérieure, la mise en série des spires. L'inductance est: $L = 115 \mu\text{H}$.

Chambre à vide

On a choisi de la réaliser en verre plutôt qu'en céramique (photo 4) pour faciliter les observations visuelles et permettre un démontage; deux demi-tores, dont la section intérieure a un diamètre de 150 mm, de rayons intérieur et extérieur respectifs de 110 mm et 260 mm, d'épaisseur 7 mm, sont prolongés par une partie rectiligne de 15 mm (dessin 2), pour être assemblés au moyen d'un joint caoutchouc L visible sur la photo. Huit sorties sont prévues, dont une pour le canon, trois pour le pompage et les autres éventuellement pour les cibles. Un vide de $3 \cdot 10^{-4}$ torr peut être obtenu en 30 minutes grâce à une pompe principale à diffusion d'huile et deux petites pompes d'appoint. Les expériences ont été effectuées à $4 \cdot 10^{-5}$ torr.

Les parties inférieure et supérieure du tore sont recouvertes chacune extérieurement d'une couche d'aquadag. Le plan de séparation de ces couches forme avec le plan médian un angle de 40° (dessin 2); elles sont portées à des potentiels symétriques $\pm V$ pouvant aller jusqu'à 5 kV.

Cibles (photo 4)

Une cible-grille transparente est constituée de fils de bronze de 0,2 mm, parallèles et espacés de 3 mm, tendus horizontalement sur un cadre de plexiglas. Elle obture toute la section du tore (dessin 2). Ces fils sont recouverts d'une poudre au phosphore qui permet de distinguer la trace des différents tours du faisceau.

Une cible métallique de 70 mm de hauteur et 40 mm de largeur, réglable en profondeur et escamotable, est elle aussi recouverte d'une poudre au phosphore pour l'observation visuelle du faisceau. Quand elle n'est pas escamotée, cette cible se trouve à 20 mm environ en arrière de la cible-grille.

Canon (photo2, dessins 1a, 1b)

L'injection est réalisée par un canon à chauffage direct pulsé dont l'optique, inspirée d'une réalisation soviétique (14), doit permettre à la fois une forte intensité et un faible angle d'ouverture (Fig. 5).

Aucune étude spéciale de l'optique n'a été entreprise. On a conservé la forme du wehnelt et ajouté une anode pour réduire l'ouverture à 6° de demi-angle, correspondant à une largeur maxima du faisceau de 50 mm pour l'indice 1/2 du champ.

La cathode est un fil de tungstène de 50 mm de long et de 1 mm de diamètre, qui a été meulé de deux côtés de manière à constituer un ruban de 40 mm de longueur et de 0,3 mm d'épaisseur, les arrivées de courant se faisant sur les extrémités demeurées cylindriques de 5 mm, serrées dans des masselottes en inox. La tension du filament est assurée par deux lames en molybdène de 0,3 mm, dont l'écartement est fixé à la base par une petite cale.

Les électrodes sont montées sur deux plaquettes de quartz ou de pyrophyllite percées de trous de 0,5 mm aux emplacements des supports des électrodes; sur celles-ci ont été soudés par points des fils de positionnement en tungstène les dépassant légèrement et inégalement; le montage de l'ensemble s'en trouve ainsi facilité. Le support proprement dit du canon est soudé au wehnelt et muni d'une articulation permettant de faire basculer le canon pour l'introduire dans la tubulure de sortie: le changement de filament peut ainsi être opéré dans un minimum de temps sans entraîner le démontage du tore.

Enfin le dispositif de réglage du canon est représenté sur le dessin 1b. La sortie d'anode est assurée par un simple contact glissant.

Les tiges d'Inox servant de support et d'arrivée de courant traversent le rodage conique par trois tubes de Kovar, l'étanchéité étant obtenue par trois tubes de caoutchouc formant joint. L'intensité étant de l'ordre de 50 ampères, et bien que le chauffage soit pulsé, un refroidissement énergétique doit être assuré par une circulation d'eau et une ventilation.

Ce montage a permis de porter la tension jusqu'à 15 kV après plusieurs jours de fonctionnement. Au début, il se produit des claquages le long des supports de mica et sur les plaquettes de pyrophyllite, qui disparaissent rapidement, s'ils ne sont dus qu'à de petites impuretés.

Electronique (schéma; diagrammes)

On s'est contenté d'une électronique rudimentaire qui s'est révélée satisfaisante pour les observations envisagées. La succession des opérations est la suivante:

- L'interrupteur initial commande simultanément le chauffage du canon et un relai à retard variable qui règle la durée de chauffage de 1 à 5 secondes.

- Environ une milliseconde avant l'extinction du filament (temps d'un ordre de grandeur mécanique obtenu par simple déformation d'une lame de contact), le relai délivre un signal de 10 V fourni par une batterie, déclenchant ainsi le cycle des opérations. Les diagrammes indiquent comment varient alors les courants dans les bobinages de champ de guidage et de champ azimuthal, ainsi que l'impulsion de tension appliquée au canon (les diagrammes 1 et 3 correspondent au premier enregistrement de la planche II).

Le bobinage de champ de guidage ($120 \mu\text{H}$) est alimenté par quatre condensateurs électrolytiques de $50 \mu\text{F}$ qui sont déchargés en régime d'amortissement critique. Une résistance en constantan de $0,23 \Omega$ placée en série, dont la tension aux bornes mesure le courant, permet de déclencher l'impulsion du canon. Pour un courant de 100 A correspondant à une injection de 20 kV ($B_1 = 25 \text{ Gs}$), la tension de charge est de l'ordre de 230 V ($\mathcal{E} = 5 \text{ J}$). Un thyatron 4 A 35 C supporte l'intensité de décharge.

Le bobinage de champ azimutal ($115 \mu\text{H}$) est alimenté par trois condensateurs de $4 \mu\text{F}$ chargés à 2 kV qui assurent avec une période de $220 \mu\text{s}$ un courant crête de 700 A, correspondant à 260 Gs sur l'orbite d'équilibre. On fonctionne en fait au-dessous du maximum et l'on ne dépasse pas 200 Gs. L'éclateur est commandé par une impulsion de 2 kV fournie par une unité de déclenchement. Celle-ci comprend aussi un thyatron 4 A 35 C qui fournit aux bornes du transformateur d'impulsion la tension de 2 kV appliquée au trigger de l'éclateur. La valeur du champ est déduite de la tension de charge, compte tenu de l'instant de déclenchement de l'impulsion de canon.

Impulsion de canon: Une impulsion carrée de $1,3 \mu\text{s}$ est obtenue par décharge d'un câble coaxial 75Ω dans sa résistance caractéristique. La vitesse de propagation étant les $2/3$ de celle de la lumière, la longueur du câble doit être de 130 m; on dispose d'une alimentation 40 kV et une unité de déclenchement analogue à celle du circuit de champ azimutal commande l'éclateur. Une inductance de choc à noyau de ferrite de $300 \mu\text{H}$ isole la cathode, sans déformer l'impulsion de plus de 20%, des transformateurs 220 - 12,5 V du circuit de chauffage.

Synchronisation

Le signal de 10 V qui déclenche le cycle des opérations commande simultanément le thyatron 4 A 35 C du circuit de champ de guidage et l'unité de déclenchement du circuit de champ azimutal.

La tension qui apparaît alors aux bornes de la résistance de $0,23 \Omega$ du circuit de champ de guidage commande l'unité de déclenchement de l'impulsion de canon par l'intermédiaire d'un thyatron 2 D 21 qui introduit un retard réglable par sa tension de polarisation.

L'oscilloscope cathodique peut être déclenché, soit par le signal initial de 10 V, pour un balayage lent (10 ou $20 \mu\text{s/cm}$), soit par l'impulsion de 10 V, pour un balayage rapide ($1 \mu\text{s/cm}$); l'unité de déclenchement apporte alors un retard de $0,7 \mu\text{s}$ permettant d'enregistrer l'ensemble du phénomène. Le champ de guidage est déterminé d'après la courbe de courant observée en balayage lent (planche IIa), l'instant de déclenchement du canon étant marqué d'un parasite.

B. Observations expérimentales

Dans les expériences, essentiellement démonstratives, le canon est disposé verticalement dans le plan médian et le faisceau est observé visuellement sur les deux cibles qui sont situées dans la région diamétralement opposée (photo 4). La direction de prise de vue a été indiquée (dessin 2); par effet de parallaxe, elle entraîne sur les enregistrements photographiques un décalage des traces.

L'intensité du faisceau a d'autre part été mesurée de différentes manières, le courant étant collecté par la cible pleine, cette fois placée à $3/4$ tours du canon et après retrait de la cible-grille.

Cinq séries d'observations et mesures ont été effectuées, le canon étant placé, dans les deux premières séries, au centre de la chambre, alors qu'il occupe, dans les trois dernières, une position périphérique.

I - Déformation du faisceau avec un champ azimuthal croissant (Planche I)

Le canon, ainsi que les deux cibles, sont centrés sur l'orbite de rayon $R_0 = 170$ mm, voisine de l'orbite d'équilibre théorique d'indice $n \# 1/2$. Le champ de guidage correspondant à cette orbite est, pour une injection à 5 kV, $B_0 = 14,5$ Gs.

On observe la déformation du faisceau, qui s'effectue sans déplacement transversal, d'abord sans champ azimuthal, puis avec des valeurs croissantes du champ.

L'éclairage de la cible provient du canon, par réflexion sur la paroi du tore; il varie légèrement d'un enregistrement à l'autre du fait du temps de pose.

1) $B_c = 0$ Pas de champ azimuthal

On observe une trace horizontale dont la dimension radiale reste grande, quelle que soit la position de la cible dans la chambre (croquis 12).

L'explication en est donnée par l'effet spectroscopique dû au fait que la tension appliquée au canon n'est définie qu'à $\pm 10\%$ près. Il en résulte qu'à la largeur normale de la trace, qui dépend de l'ouverture du canon et de la position de la cible (ici 40 mm), s'ajoute, pour toute position de celle-ci, une dispersion radiale de l'ordre de ± 15 mm correspondant à un déplacement de l'orbite de ± 8 mm.

2) $B_0 = 20$ Gs Champ azimuthal très faible

On observe une rotation apparente de la trace, dont l'angle avec la verticale peut être déterminé approximativement, compte tenu de l'effet de perspective (croquis 12).

En négligeant l'effet spectroscopique, toutes les particules admettent la même orbite d'équilibre, de trace méridienne Ω_0 ; en particulier, les particules injectées sans vitesse transversale initiale décrivent des hypocycloïdes homothétiques par rapport à Ω_0 . On a

$$\lambda = \left| \frac{B_c}{B_0} \right| = 1,4$$

$$S_2 = 1,7$$

$$S_1 = -0,3$$

$$\Theta = \frac{2\pi}{|S_1| + S_2} = \pi$$

Ainsi, la période correspond-elle précisément à l'emplacement des cibles pour lesquelles le dispositif est stigmatique, ce qui explique l'étroitesse relative de la trace. L'angle de rotation par rapport à la verticale est:

$$S_1 \Theta = 54^\circ$$

en accord avec l'expérience.

On a vérifié qu'en interceptant le faisceau au bord supérieur du canon, la partie gauche de la trace est éclipcée.

3) $B_0 = 60$ Gs

Le faisceau est entièrement intercepté par la cible. On distingue nettement l'ombre électronique de la cible-grille, avec une légère rotation. On note la déformation "en accent" qui sera à rapprocher de la déformation "en losange" des enregistrements de la planche III. On a :

$$S_2 \simeq \lambda \neq 4$$

$$S_1 \simeq -\frac{1}{2\lambda} \neq -\frac{1}{8} \quad S_1 \pi \neq -\frac{\pi}{8}$$

$$\Theta \simeq \frac{2\pi}{S_2} \neq \frac{\pi}{2}$$

4) $B_0 = 110$ Gs

Le faisceau est encore plus concentré. On distingue encore l'ombre de la cible-grille, qui est plus inclinée que dans l'enregistrement précédent. On a :

$$S_2 \simeq \lambda = 7,5$$

$$S_1 \simeq -\frac{1}{2\lambda} = -\frac{1}{15} \quad S_1 \pi \neq -0,2 \text{ rad.}$$

$$\Theta \simeq \frac{2\pi}{S_2} \neq \frac{\pi}{4}$$

II - Déplacement transversal du faisceau
(Planche II)

Le canon et les deux cibles sont encore centrés sur l'orbite de rayon $R_0 = 170$ mm; la tension d'injection a été abaissée à 4,1 kV, correspondant au champ de guidage: $B_0 = 13$ Gs. Le champ azimuthal garde une valeur élevée supérieure à 100 Gs.

a) Déplacement vertical (Planche IIa)

On modifie le champ de guidage de manière à déplacer l'orbite d'équilibre de part et d'autre de l'orbite R_0 ; il en résulte une force radiale s'exerçant sur les électrons, d'où un glissement vertical de la trace.

Les enregistrements de la ligne supérieure représentent le courant i dans le bobinage de champ de guidage, mesuré aux bornes de la résistance de $0,23 \Omega$. L'instant t de déclenchement de l'impulsion de canon est repéré sur la courbe et permet de déduire la valeur du champ de guidage sur l'orbite d'injection.

Les trois enregistrements correspondent aux valeurs respectives suivantes du champ de guidage et du champ azimuthal:

- | | |
|----------------------------|------------------------|
| 1) $R_0 = 10 \text{ Gs}$ | $R_0 = 200 \text{ Gs}$ |
| 2) $R_0 = 13,2 \text{ Gs}$ | $R_0 = 200 \text{ Gs}$ |
| 3) $R_0 = 16,2 \text{ Gs}$ | $R_0 = 120 \text{ Gs}$ |

La trace est légèrement plus étroite dans le dernier enregistrement du fait que le champ azimuthal est plus faible.

Interprétation:

Le champ de guidage sur l'orbite d'injection présente un écart $\epsilon \neq 3 \text{ Gs}$ en plus ou en moins de la valeur théorique. La force additionnelle qui en résulte est:

$$F = \pm e \epsilon v_{\Theta} \quad (e = \text{charge de l'électron})$$

d'où, en appelant L la distance parcourue par le faisceau du canon à la cible, le glissement:

$$\delta = \frac{F}{e B_0} \cdot \frac{L}{v_{\Theta}} = L \frac{\epsilon}{B_0}$$

On a ici $L = 0,5 \text{ m}$ d'où:

- 1) $\delta = 7,5 \text{ mm}$
- 2) $\delta = 0$
- 3) $\delta = 12,5 \text{ mm}$

en accord avec l'expérience. Le déplacement de l'orbite d'équilibre est de l'ordre de 40 mm de part et d'autre de l'orbite d'injection.

b) Déplacement oblique (Planche IIb)

On porte les couches d'aquadag à des potentiels symétriques $\pm \mathcal{V}$, d'où résulte un glissement de la trace suivant la ligne neutre des couches dans le plan méridien, faisant un angle de 40° avec la direction horizontale.

Le champ azimuthal est: $B_0 = 110$ Gs

- 1) $\mathcal{V} = + 1,3$ kV
- 2) $\mathcal{V} = + 0,5$ kV
- 3) $\mathcal{V} = - 0,5$ kV
- 4) $\mathcal{V} = - 1,3$ kV .

Interprétation:

Le glissement δ' est:

$$\delta' = \frac{E}{B_0} \cdot \frac{L}{v_\Theta} .$$

Pour $\mathcal{V} = - 1,3$ kV, $\delta' = 19$ mm, d'où un écart d'environ 40 mm entre la trace des enregistrements 1) et 4) en accord avec l'expérience.

III - Déplacement radial du faisceau

(Planche III)

On cherche à composer les deux déplacements transversaux précédents de manière à avoir un déplacement radial résultant. On doit alors opérer avec un champ azimuthal suffisamment faible et avec une injection sur une orbite périphérique de rayon $R_0 = 230$ mm.

La tension d'injection de 8 kV correspond au champ de guidage sur l'orbite d'injection $B_0 = 13,4$ Gs. Le champ azimuthal est $B_0 = 50$ Gs. On fait varier successivement B_0 et la tension $\mathcal{V}$ appliquée aux couches d'aquadag.

1) $B_0 = 13,5$ Gs; $\mathcal{V} = 0$

Le faisceau est sensiblement injecté sur son orbite d'équilibre.

On a:

$$S_2 \simeq \lambda = 3,7$$

$$S_1 \simeq -\frac{1}{2\lambda} = -0,13 \quad S_1 \pi = -23^\circ$$

$$\Theta \neq \frac{\pi}{2}$$

Ces résultats sont sensiblement en accord avec l'expérience. On note la déformation "en losange" avec deux bords nets, images du collimateur d'anode, indiquant bien le sens de rotation de la trace; l'ombre électronique de la grille est très visible et indique le sens de rotation cyclotron.

2) $B_0 = 15$ Gs; $\mathcal{V} = 0$

On observe le déplacement vertical du faisceau. Pour $\epsilon = 1,5$ Gs, $\delta = 15$ mm.

3) $B_0 = 15$ Gs; $\mathcal{V} = 1,3$ kV

Le déplacement oblique est: $\delta' \neq 30$ mm, d'où le déplacement radial résultant de l'ordre de 25 mm, approximativement en accord avec l'expérience.

4) $B_0 = 15$ Gs; $\mathcal{V} = 1,3$ kV; cible pleine enlevée

On constate alors qu'une grande partie de la cible-grille est illuminée. Après le premier demi-tour, le faisceau continue en effet à glisser radialement, en s'appauvrissant sur la cible-grille d'environ 10% à chaque tour. La luminosité de la trace baisse rapidement, d'autant plus que le champ azimutal faible ne confine que médiocrement le faisceau.

Ainsi, un processus d'injection est mis en évidence, qui exploite simultanément le confinement dû au champ azimutal (évitant ainsi qu'une forte partie du faisceau soit perdue sur les parois de la chambre) et le

glissement par effet de champs croisés; en jouant sur les deux paramètres B_0 et φ' , on peut composer les deux déplacements transversaux élémentaires en un déplacement sensiblement radial, permettant ainsi d'exploiter au mieux les dimensions transversales de la chambre. Les deux effets permettent en outre d'éviter le canon au premier tour pour la presque totalité du faisceau.

Remarque

La forme en losange et non en accent du dernier enregistrement doit s'expliquer par la position périphérique du canon. La fréquence du champ azimuthal est en effet de 4 kC, correspondant à une profondeur de pénétration de 1,8 mm dans le molybdène. Si l'on tient compte de la forme du wehnelt au voisinage de la cathode, on voit que l'effet de blindage n'est pas négligeable. Or, le bobinage de champ azimuthal présente un centre de focalisation Ω' (point de champ électrique induit nul) situé entre la paroi extérieure du tore et le contour extérieur du bobinage. Si le canon pouvait être placé en ce point, la déformation du faisceau serait sensiblement symétrique et, si la cathode était efficacement blindée, le faisceau serait focalisé (en non confiné). Quand le canon est très éloigné de Ω' (I - 3), la dissymétrie du champ entraîne une déviation verticale des électrons plus forte vers l'axe du tore que vers la périphérie.

L'emploi d'un bobinage de champ azimuthal ellipsoïdal (appendice) et d'un canon à symétrie de révolution rendrait possible l'injection d'un faisceau focalisé de forte intensité, tout en permettant la réduction du champ azimuthal à quelques dizaines de gauss.

IV - Mesure du courant

(Planche IV)

En opérant avec un champ azimuthal suffisamment élevé, le faisceau peut être entièrement intercepté par la cible et son intensité mesurée. En interceptant une partie seulement du faisceau, on s'assure que l'image optique coïncide sensiblement avec l'image électronique: le courant est nul dès que le faisceau ne fait qu'effleurer la cible.

La mesure absolue du courant atteignant la cible peut se heurter à une difficulté du fait de l'émission secondaire du molybdène, qui pourrait peut-être atteindre 10 à 20% pour des électrons de 10 kV. Les électrons secondaires émis avec une énergie de l'ordre du volt, soit une vitesse 100 fois plus faible que celle des électrons primaires, sont confinés par le champ magnétique hélicoïdal ($B_0/B_0 \neq 10$) et peuvent au plus atteindre l'anode du canon en fin d'impulsion. Si l'on admettait une émission secondaire de 1% seulement, la charge ainsi accumulée serait de l'ordre de celle injectée pendant le temps d'une révolution.

Le canon et la cible sont placés sur l'orbite de rayon $R_0 = 230$ mm, soit à 20 mm du bord extérieur de la chambre, la cible étant à $3/4$ de tour du canon.

a) Mesure directe (Planche IVa)

Le faisceau est entièrement intercepté par la cible.

1) La cible est mise à la masse par une résistance de 100 Ω . On mesure environ 75 mA.

2) La cible est isolée par une capacité de 10 000 pF. On mesure avec plus de précision 77 mA.

Interprétation:

En désignant par q la charge injectée durant $3/4$ révolution et respectivement par α_1 et α_2 le coefficient de perte ($\alpha_1 q$ étant la perte subie durant le temps τ_1 correspondant) et le coefficient d'émission secondaire, le courant I mesuré est:

$$I = \frac{q}{\tau_1} [1 - (\alpha_1 + \alpha_2)] .$$

b) Mesures indirectes (Planche IVb)

La mesure directe est nécessairement destructive. En particulier, elle ne permettrait pas la mesure du courant accumulé dans la chambre. D'autre part, une mesure indirecte magnétique (bobine de Rogovski) est délicate du fait des parasites engendrés par l'éclateur. La mesure

électrostatique utilisant la couche d'aquadag, dont les parties supérieure et inférieure ont été préalablement reliées, comme électrodes d'influence, s'est montrée beaucoup plus sensible.

α) On se contente de mesurer la charge totale injectée pendant une impulsion de courant.

La tension de la couche d'aquadag est mesurée aux bornes de 10 000 pF. Une charge positive initiale est induite par les bobinages et décroît avec une constante de temps de 320 μ s environ. L'observation est faite en balayage lent (20 μ s/cm) et l'impulsion de canon déclenchée après 38 μ s.

1) La cible est reliée à la masse et intercepte entièrement le faisceau. On observe un simple "parasite".

2) La cible est isolée. Une importante charge négative est induite au moment de l'impulsion.

Interprétation:

Lorsque la cible est la masse, ne s'accumulent dans le tore que la charge des électrons perdus sur la paroi et celle des électrons secondaires.

Lorsque la cible est isolée, toute la charge injectée s'accumule.

La comparaison des deux enregistrements montre que les pertes sont négligeables, à la précision de l'observation près.

Il est difficile de tirer de cette observation une détermination précise du courant, du fait qu'on ne connaît pas exactement le coefficient d'influence de la couche d'aquadag; on retrouve le résultat précédent de 75 mA si l'on admet un coefficient de 0,75.

β) On répète la mesure α1) avec une plus grande sensibilité (la tension est mesurée aux bornes de 50 pF) et une vitesse de balayage plus élevée (1 μ s/cm). La charge atteignant la cible est encore évacuée au sol, cependant que les pertes sur les parois et les électrons d'émission secondaires s'accumulent.

L'impulsion de canon est déclenchée avec 0,7 μ s de retard par rapport au balayage.

1) La cathode n'étant pas chauffée, on observe seulement un signal parasite.

2) La cathode étant chauffée, le canon fonctionne normalement et l'on observe un signal compris entre 10 V et 15 V, qui disparaît immédiatement après l'impulsion.

Interprétation:

En désignant par τ_2 la durée de l'impulsion, la charge Q' accumulée est:

$$Q' = q + q(\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\tau_2}{\tau_1} .$$

Or, du résultat de la mesure directe, on tire, en posant $Q = I \tau_2$:

$$Q = q \frac{\tau_2}{\tau_1} - q(\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\tau_2}{\tau_1} .$$

Les valeurs numériques sont, en admettant un signal de 12 V, et en tenant compte du coefficient d'influence évalué à 0,75:

$$Q' = 10^{-9} \text{ Cb}$$

$$Q = 10^{-7} \text{ Cb} .$$

Elles montrent que le coefficient est ici surestimé; si l'influence électrostatique est due essentiellement au faisceau, il faut en effet tenir compte du fait que celui-ci longe une partie de la paroi non recouverte d'aquadag.

Enfin, le fait que le signal disparaît immédiatement après l'impulsion indique bien que seul le faisceau en est la cause.

V - Injection multitours

(Planche V)

Le principe d'un mode d'injection utilisant un champ azimuthal pour confiner le faisceau, combiné avec un champ électrostatique oblique, pour le dévier vers l'intérieur de la chambre, a été mis en évidence dans les enregistrements photographiques III-3; III-4.

La dernière série d'expériences a pour but la réalisation, sur ce principe, d'une injection en plusieurs tours distincts d'un faisceau fortement confiné: le champ azimuthal est élevé à la valeur de 110 Gs et un champ électrostatique croissant est appliqué entre les couches d'aquadag.

On observe alors un déplacement transversal accru du faisceau; pour la valeur maximum du champ électrostatique, il est nécessaire de déplacer l'orbite d'équilibre vers le bord intérieur de la chambre, afin que le glissement s'effectue radialement.

1) $\mathcal{V} = 2$ kV

On observe une seule trace sur la cible-grille et sur la cible pleine.

2) $\mathcal{V} = 3,5$ kV

Le décalage du faisceau lui fait éviter la cible pleine; on observe alors une seconde trace, plus faible, sur la cible-grille.

3) $\mathcal{V} = 4$ kV

On accroît en outre l'intensité du faisceau. On observe une troisième trace à gauche des précédentes.

Enfin, dans les deux derniers enregistrements, on a accru l'intensité du faisceau au maximum (environ 200 mA), de manière à pouvoir dénombrer tous les tours:

4) L'orbite étant au centre de la chambre, on observe un glissement oblique (la cible, éclairée par le canon, a été relevée de manière à ne pas intercepter le faisceau).

5) L'orbite est ramenée au bord intérieur de la chambre; le glissement est alors orienté vers le haut.

Dans ces deux derniers enregistrements, on compte nettement cinq tours du faisceau. Or, l'intensité du canon a pu être poussée jusqu'à 200 mA sans perturbation notable des observations, et jusqu'à 500 mA pendant quelques essais. Le nombre d'électrons injectés est alors de $3 \cdot 10^{10}$. Remarquons cependant qu'on a cherché ici à bien distinguer les différents tours du faisceau et non à réaliser le maximum d'efficacité de l'injection. De plus, on a intérêt à injecter à l'énergie la plus faible possible compatible avec une émission saturée de la cathode. Finalement, on peut considérer qu'il est possible par ce procédé d'injecter au moins 10^{11} électrons dans un appareil de 1 m de longueur d'orbite moyenne, correspondant à 1 A pour une énergie de 10 kV, soit un gain d'un facteur 10 par rapport au bétatron conventionnel.

CONCLUSION

Une réalisation expérimentale élémentaire nous a permis de montrer qu'on pouvait prendre en considération d'autres procédés d'injection que ceux habituellement utilisés, et que l'application de champs croisés était particulièrement adaptée aux accélérateurs à grande extension radiale de chambre. Si l'emploi d'un champ azimuthal peut parfois présenter des inconvénients, il n'en est rien pour les applications médicales et industrielles. Or, l'économie qui résulte, pour le bétatron, du calcul rationnel du bobinage, jointe aux valeurs élevées de la surtension et de l'intensité crête, ainsi qu'à la dimension réduite de l'appareil, fait que de telles applications peuvent être sérieusement envisagées.

D'autre part, l'obtention d'un faisceau homogène dont l'intensité pourrait être très élevée serait d'un grand intérêt pour les études de stabilité des plasmas relativistes.

APPENDICE

CALCUL D'UN BOBINAGE DE CHAMP AZIMUTAL PULSE

Dans l'étude de l'injection par champ azimuthal variable, on a indiqué les conditions aux limites auxquelles doit satisfaire le champ électrique induit sur l'orbite d'équilibre pour qu'on puisse se considérer comme ramené au cas rectiligne: le champ électrique doit être nul sur l'orbite et ses lignes de force doivent, en son voisinage, être des cercles centrés sur elle. Un tel bobinage, dont trois possibilités d'utilisation pour l'injection ont été signalées, peut en outre servir de bobinage de focalisation forte en fin d'accélération et permettre d'obtenir des densités de courant qu'on ne peut atteindre normalement qu'avec un bétatron de haute énergie.

Une détermination précise doit porter sur le contour du bobinage lui-même, ainsi que sur celui de l'écran électrostatique indispensable.

Calcul du bobinage

Considérons le contour semi-elliptique de la Fig. 4, qui peut être assimilé pratiquement à un contour polygonal, et qui est tel que le courant I arrive suivant l'axe.

Soit a et b les axes de l'ellipse, j_s la densité de courant de surface en un point M , et $j_z = j_s \cos \alpha$ sa composante verticale.

L'équation de l'ellipse est:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

d'où, en M :

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{dr}{dz} \right| = \frac{z}{r} \frac{a^2}{b^2}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{a^4}{r^2} \left[\frac{r^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^2} \right]$$

$$j_z = \frac{I}{2\pi a^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^4}}} \quad (1)$$

Si l'on compare cette relation avec celle qui donne, en électrostatique, la densité de charge sur un ellipsoïde conducteur¹³⁾ :

$$\sigma = \frac{q}{4\pi a^2 b} \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^4}}}$$

où q est la charge totale du conducteur, on en déduit qu'on peut établir l'identification:

$$\sigma \leftrightarrow j_z$$

$$q \leftrightarrow 2bI$$

et

$$\epsilon_0 \leftrightarrow \frac{1}{\mu_0}$$

pour l'expression des potentiels V et A_z tous deux constants à l'intérieur de l'ellipsoïde.

Cette propriété est évidente lorsque l'ellipsoïde dégénère en un cylindre ou en une sphère. Dans ce dernier cas:

$$a = b = R, \quad \sigma = \frac{q}{4\pi R^2}, \quad j_z = \frac{I}{2\pi R},$$

$$V = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R}, \quad A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi}.$$

Soit A_1 la composante du potentiel-vecteur due au courant I sur l'axe, en un point $B(r, 0)$ du plan médian:

$$A_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \operatorname{Argsh} \left(\frac{b}{r} \right). \quad (2)$$

Pour la sphère, le point Ω' (R' , 0), où le potentiel-vecteur total est nul, est tel que:

$$\frac{\mathcal{R}}{R'} = \text{sh } 1, \quad \text{soit } \mathcal{R} = 1,17 R'.$$

On voit donc que, pour éloigner Ω' de la paroi extérieure du bobinage, il faut choisir $b < a$.

Soit alors A_z la composante verticale du potentiel-vecteur due au retour du courant sur l'ellipsoïde¹³):

$$A_z = - \frac{b \mu_0 I}{4\pi} \int_0^\infty \frac{du}{(u + a^2) \sqrt{u + b^2}}$$

$$A_z = - \frac{b \mu_0 I}{2\pi \sqrt{a^2 - b^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \text{Arctg} \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right].$$

En posant:

$$\nu = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

il vient:

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\text{Arctg} \nu}{\nu}.$$

Le point Ω' est donc tel que:

$$\text{Argsh} \frac{b}{R'} = \frac{\text{Arctg} \nu}{\nu}.$$

La condition pour que les lignes de force du champ électrique soient des cercles autour de Ω' est qu'en ce point:

$$\frac{\partial A_r}{\partial z} = - \frac{\partial A_z}{\partial r}.$$

Or:

$$\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

d'où

$$\frac{\partial A_1}{\partial r} = - \frac{\mu_0 I}{4\pi r}$$

soit, en faisant $R' = 1$, et compte tenu de (2):

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,58 .$$

ν et a sont alors déterminés par:

$$\text{Argsh } b = \frac{\text{Asctg } \nu}{\nu}$$

$$a = b \sqrt{1+\nu^2} = 1,3$$

Calcul de l'écran électrostatique

Un tel bobinage doit nécessairement être muni d'un écran électrostatique. Cependant, d'autres charges que celles faisant écran s'y développent du fait du courant induit et, si l'on ne prend pas de précautions particulières, les propriétés du bobinage risquent d'être complètement perturbées.

Supposons l'écran constitué d'une couche de résistivité de surface ρ sur une surface annulaire Σ entourant l'orbite de trace méridienne Ω' .

Soit A_T la composante tangentielle du potentiel-vecteur en N et j_Σ la densité de courant de surface; en l'absence de toutes autres charges que celles faisant écran on a:

$$-\frac{\partial A_T}{\partial t} = \rho j_\Sigma$$

avec:

$$j_\Sigma = \frac{I_\Sigma}{2\pi r} ,$$

où I_{Σ} est le courant total induit dans l'écran. En régime variable, on a donc:

$$\rho \sim r A_T .$$

En particulier si, pour des raisons pratiques, on désire $\rho = \text{cte}$, on aura à déterminer une surface $r A_T = \text{cte}$.

Il suffit alors de déterminer quatre points de la courbe méridienne de cette surface: deux points du plan médian (P et R) où $A_T = A_z = A$ et, par exemple, les deux points à tangentes horizontales (Q et S) où $A_T = A_r = A$, intersections de la méridienne avec la courbe (C) telle que $A_z = 0$.

En posant:

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi} = 1$$

d'où:

$$A_1 = \frac{1}{2} \left[\text{Argsh} \frac{b-z}{r} + \text{Argsh} \frac{b+z}{r} \right] ,$$

l'équation de la courbe (C) est:

$$\text{Argsh} \frac{b-z}{r} + \text{Argsh} \frac{b+z}{r} = 2 \text{Argsh} b ,$$

soit:

$$\left[\frac{b-z}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{b-z}{r} \right)^2} \right] \times \left[\frac{b+z}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{b+z}{r} \right)^2} \right] = 3 .$$

Les relations $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, $\nabla \times \vec{A} = 0$ donnent, sur (C):

$$\frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r A_z)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial(r A_r)}{\partial z} - \frac{\partial(r A_z)}{\partial r} = 1 ,$$

d'où, pour la variation $\Delta(r A_r) = \Delta(rA)$ suivant la courbe (C):

$$\Delta(rA) = \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial(r A_z)}{\partial z} \Delta z$$

$$\Delta(rA) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b+z}{r}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b-z}{r}\right)^2}} \right] \Delta r + \left[1 - \frac{1}{2r} \frac{b+z}{\sqrt{1 + \left(\frac{b+z}{r}\right)^2}} + \frac{b-z}{\sqrt{1 + \left(\frac{b-z}{r}\right)^2}} \right] \Delta z .$$

On détermine ainsi aisément l'allure des courbes $r A_T = \text{cte}$ (Fig. 6), ainsi que les lignes de force du champ électrique induit par l'intégrale

$$\int_{\widehat{\Omega'M}} r \vec{A} \wedge d\vec{s} = \text{cte} ,$$

(prise suivant un contour quelconque joignant Ω' au point courant M) qui sont très sensiblement des cercles centrés en Ω' . Ce point est lui-même très voisin du centre de courbure de l'ellipse en son sommet, propriété qui était à prévoir.

Ce travail a pu être entrepris grâce à la compréhension de Monsieur Winter, Chef des Services de Physique Appliquée au Commissariat à l'Energie Atomique, qui avait bien voulu me détacher à l'Organisation Européenne pour la Recherche Nucléaire.

Je suis très reconnaissant à Monsieur le Professeur Schoch, Directeur de la Division de Recherches sur les Accélérateurs au CERN, de l'intérêt bienveillant qu'il a porté à la présente étude et des précieuses directives qu'il m'a données.

Je remercie vivement Messieurs les Professeurs Grivet et Magnant de m'avoir permis, au Centre National de la Recherche Scientifique, de conduire mes recherches à leur terme. Que Monsieur le Professeur Bruck, qui s'est constamment tenu informé de mes travaux, reçoive également l'expression de ma gratitude.

Je dois des remerciements aux nombreuses personnes qui m'ont aidé de leur collaboration ou de leurs conseils, en particulier à Messieurs E. Jones, Ch. Maisonnier, J. Parain, B. Robouch, F. Schneider.

Ma reconnaissance va également à toutes les personnes qui m'ont apporté leur aide dans les calculs et la réalisation expérimentale, notamment celle du canon.

La Direction du CERN, qui m'a permis de mener à bien cette étude, a droit à toute ma gratitude.

BIBLIOGRAPHIE

1. G.J. Budker - Relativistic stabilized electron beam, CERN Symposium (1956).
2. D.C. de Paekh - A quasi-equilibrium electron guide field, Proceedings of the third international conference on ionization phenomena in gases, Venice (1957).
2. J.G. Linhart, P. Gratreau, E.R. Harrison, Ch. Maisonnier, F. Schneider and A. Schoch - Plasma betatrons, Proceedings of the international conference on high-energy accelerators and instrumentation, CERN (1959).
A.M. Stephanovski - Acceleration of electrons in a plasma, International conference on high-energy accelerators, Brookhaven (1961).
3. T. Ohkawa - Notes on the electrostatic instability of neutralized electron beams, CERN 60-35 (1960).
4. Logounov, Ovchinikov, Rusanov - Soviet Physics, J.E.T.P. 2, p. 1032 et 1038 (1957).
Seidl - J.E.T.P. 36, p. 1305.
5. M.S. Liwingston et J.P. Blewett - Particle accelerators, Mac Graw-Hill Company.
6. J.C. Linhart - Plasma physics, p. 24, North-Holland Publishing Co.
7. R. Gans - Zeitschrift für Naturforschung 1, p. 495 (1946).
J.A. Raichman et W.H. Cherry - J. Franklin Inst. 243, p. 261 (1947).
8. D.L. Judd - A study of the injection process in betatrons and synchrotrons, California Institute of Technology, Thesis (1950).
B.N. Rodimov - Laws governing the magnetic field of betatrons, Soviet Physics, Technical Physics 2, 6, p. 1229 (1957).
9. P. Gratreau, Ch. Maisonnier - Contribution à l'étude des bétatrons à air, CERN 60-1 (1960).
10. A. Bierman - A new type of betatron without an iron core, Nature 163, p. 649 (1949).

11. L. Spitzer - Physics of fully ionized gases.
12. C. Störmer - Über die Bahners von Elektronen im axialsymmetrischen elektrischen und magnetischen Feldes, Archives des Sciences Physiques et Naturelles, Genève, 24, p. 685 (1907).
P. Grivet, M.Y. Bernard, A. Septier - Optique électronique I, p. 76, Bordas.
13. J.A. Straton - Electromagnetic theory, Mac Graw-Hill Company.
14. Comptes rendus de l'Institut Polytechnique S.M. Kirov, 87
Accélérateurs circulaires à électrons Tomsk (1957).

CROQUIS

- 1-5 - Bobinage de champ de guidage
- 6 - Bétatron à air (8 spires)
- 7 - Bétatron à fer (Forme schématique de pièces polaires)
- 8 - Trajectoire méridienne (Effet de non-uniformité du champ azimuthal)
- 9-10 - Trajectoires circulaires pour un champ de guidage nul (champ azimuthal à variation adiabatique)
- 11 - Pertes sur les parois à l'injection
- 12 - Rotation de la trace avec le champ azimuthal (observations de la planche I, 1 et 2).

FIGURES

- 1 - Puits de potentiel
- 2-3 - Injection multitours par champ croisés
- 4 - Injection par champ azimuthal pulsé
- 5 - Canon: Principe

—

- I - Courbes du bétatron à champ azimuthal
- II-III - Trajectoires méridiennes pour $B_0 = 3/2 B_0$
- IV - Mouvements composants pour $B_0 = 1/2 B_0$.

SCHEMA - DIAGRAMMES

Electronique de l'injection en régime quasi-statique

DESSINS

- 1 a) - Canon à chauffage pulsé 15 kV - 200 mA
- 1 b) - (Montage et réglage du canon)
- 2 - Bétatron à injection multitours.

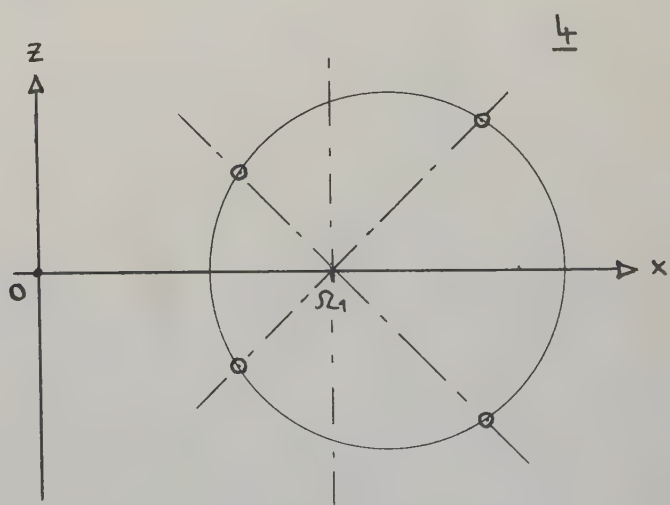
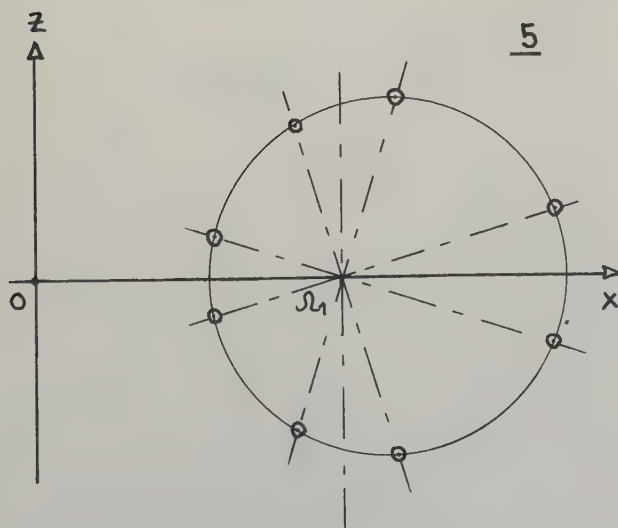
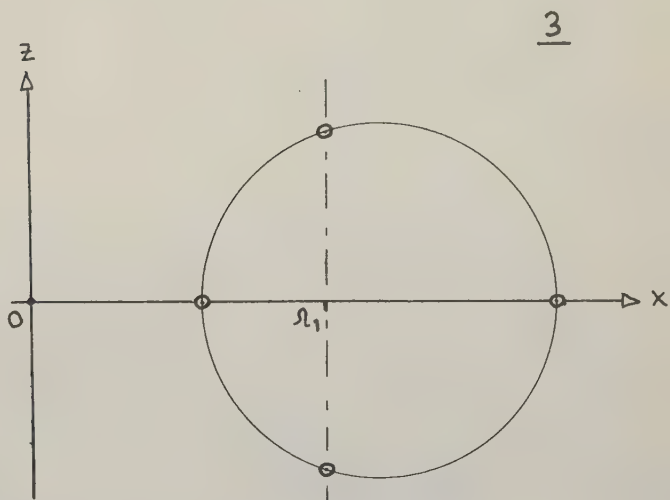
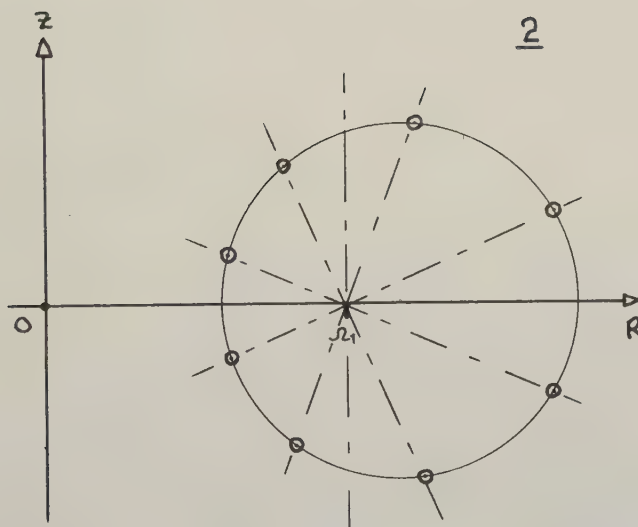
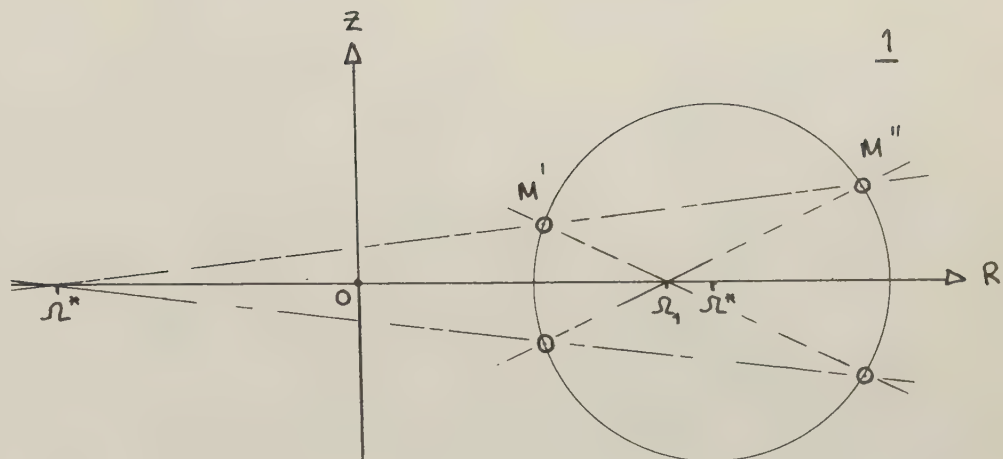
PHOTOS

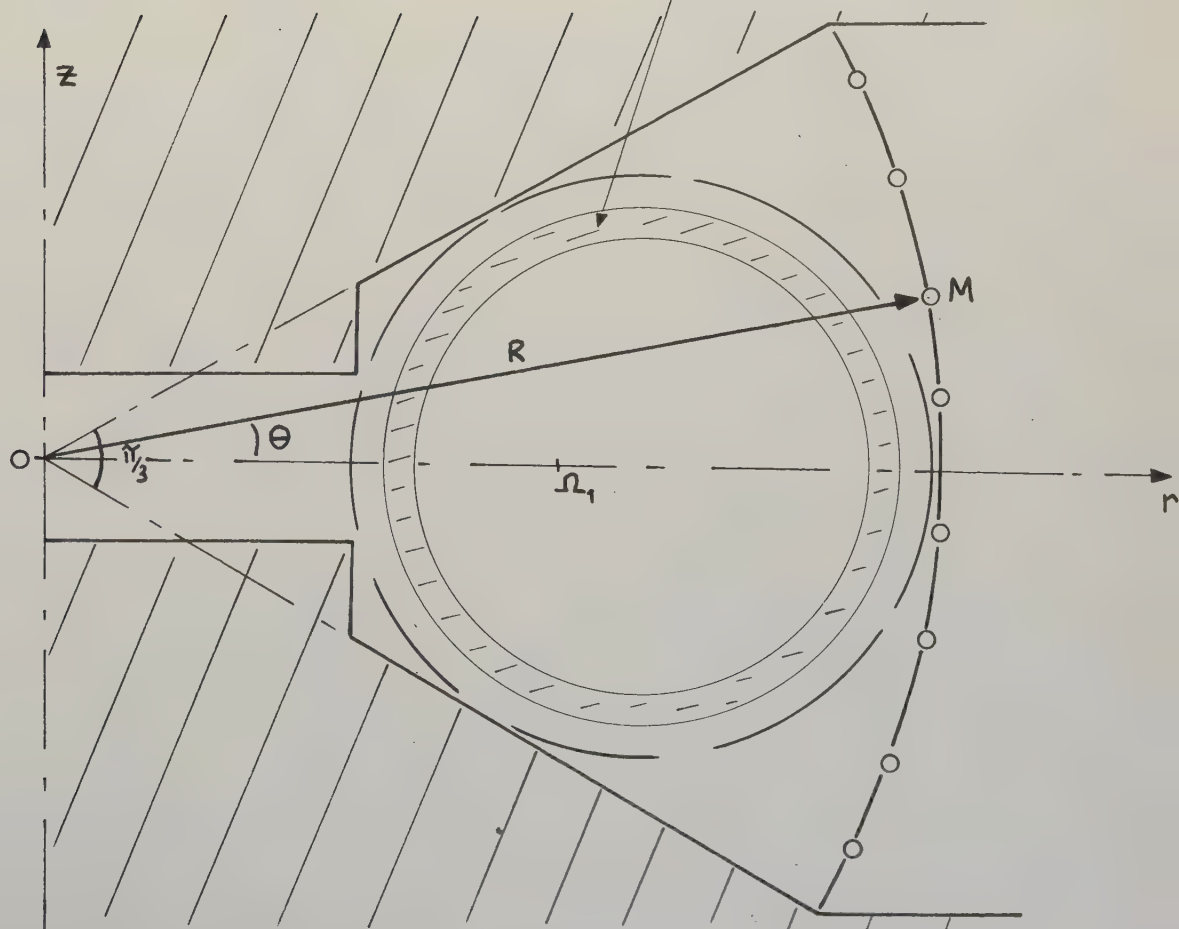
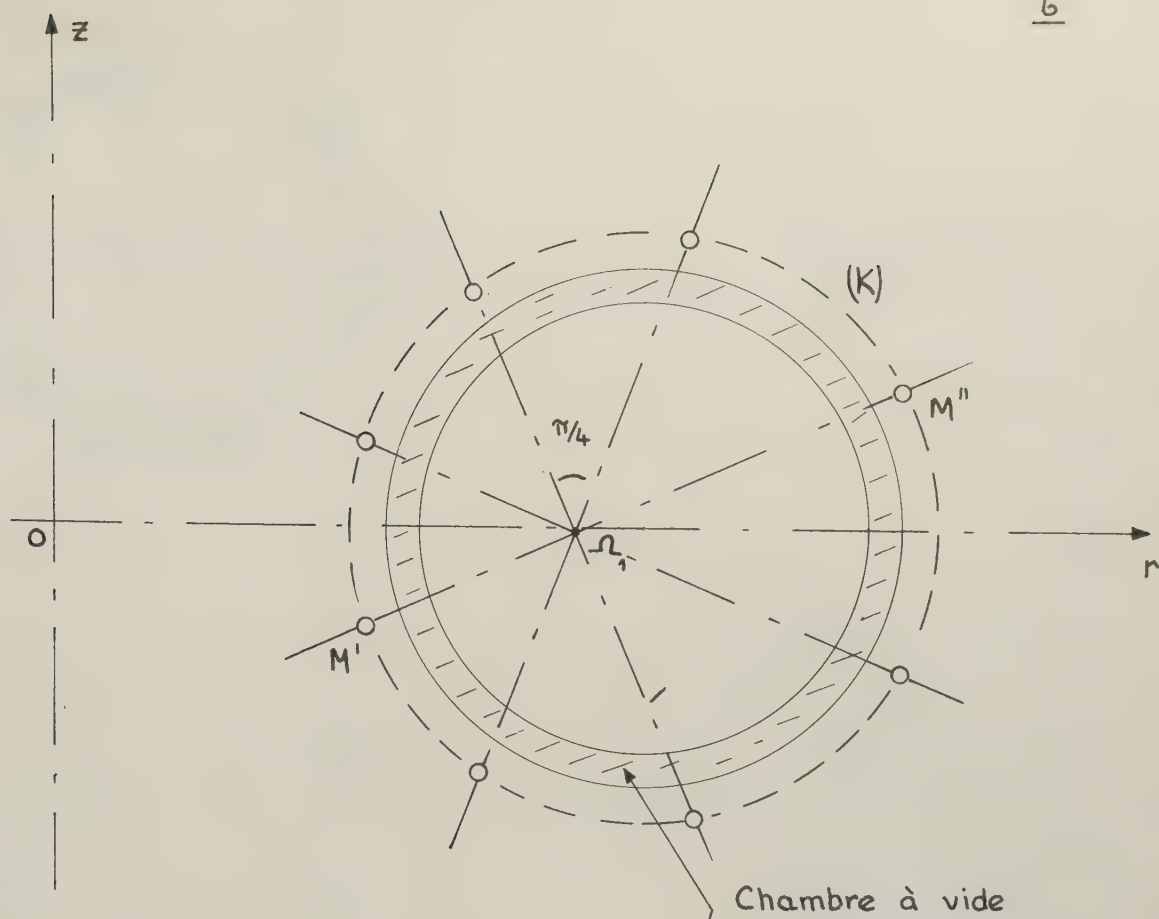
- 1 - Bobinage 2×12 spires
- 2 - Canon
- 3 - Vue sortie canon
- 4 - Appareil ouvert
- 5 - Ensemble de l'appareil de 167 mm de rayon d'orbite (24 spires)
- 6 - Bobinage 2×4 spires
- 7 - Appareil de 80 mm de rayon d'orbite (8 spires)

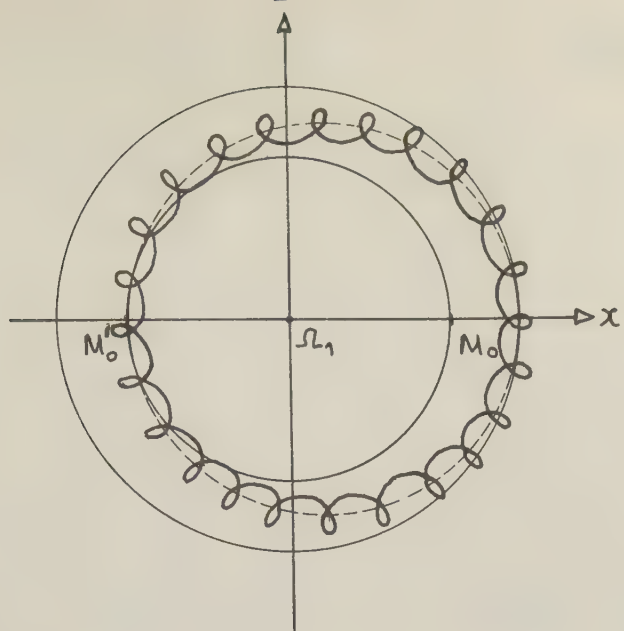
PLANCHES

- I - Déformation du faisceau
- II - Déplacement transversal du faisceau
 - a) Déplacement vertical
 - b) Déplacement oblique
- III - Déplacement radial du faisceau
- IV - Mesure du courant
- V - Injection multitours

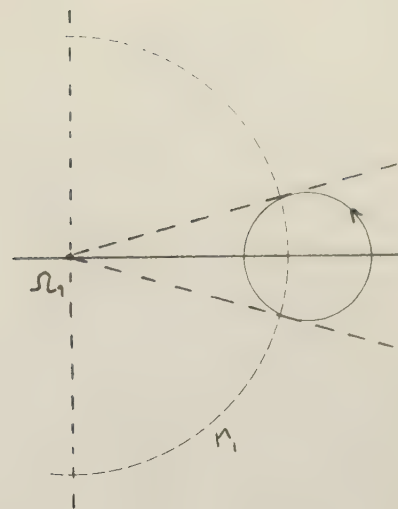
CROQUIS



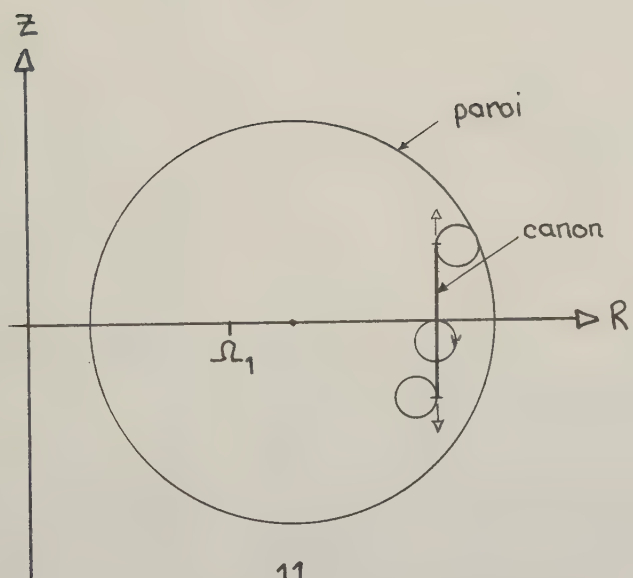




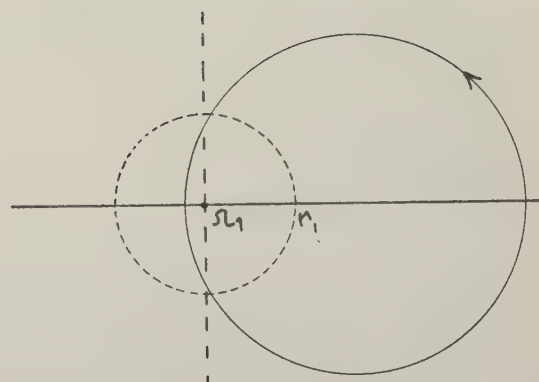
8



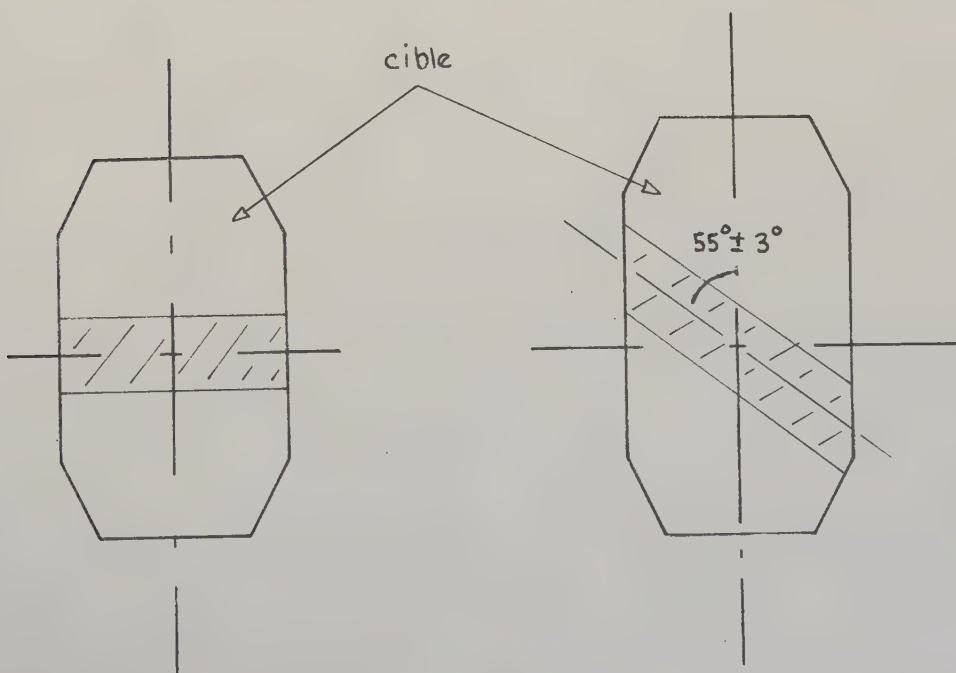
9



11

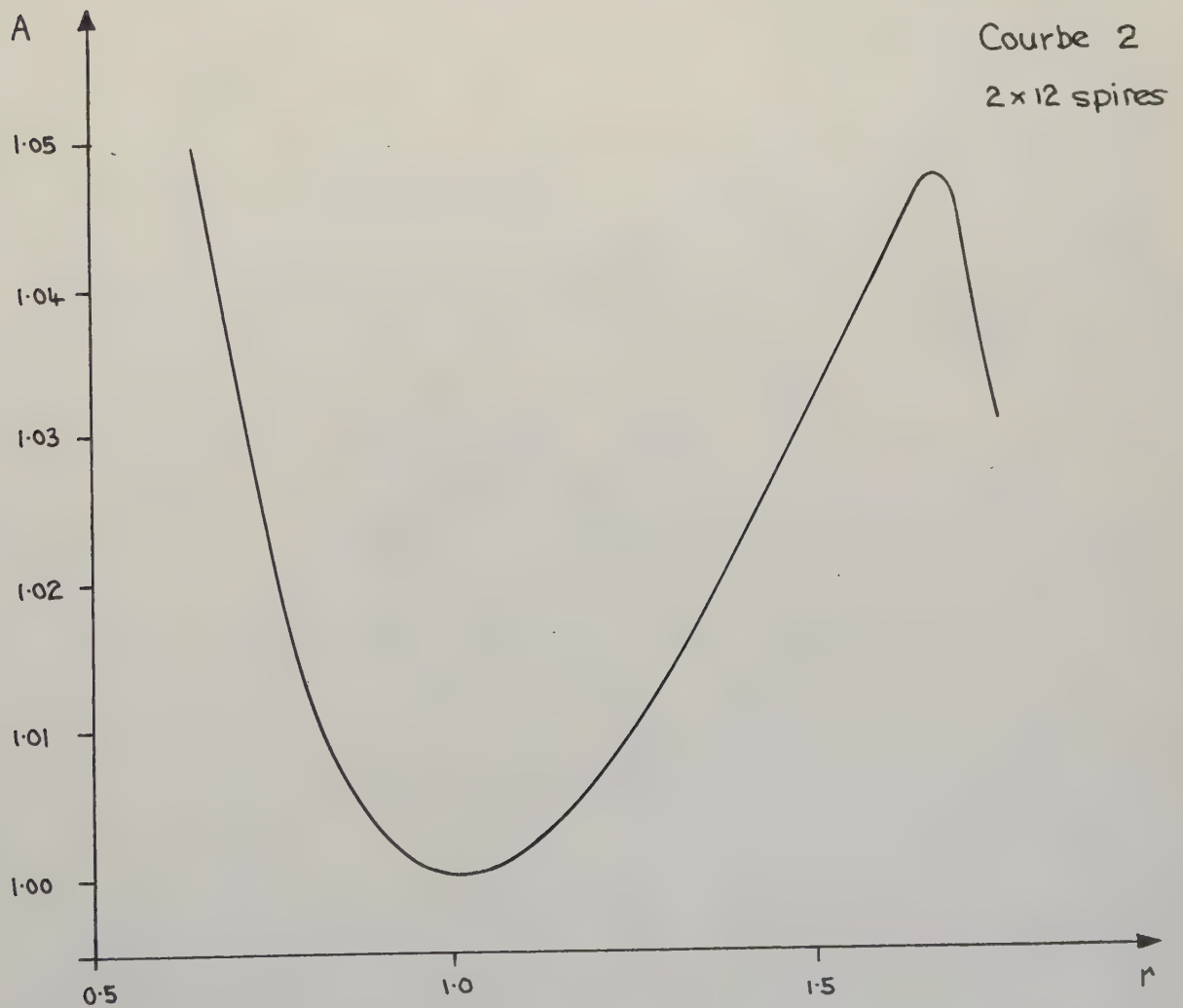
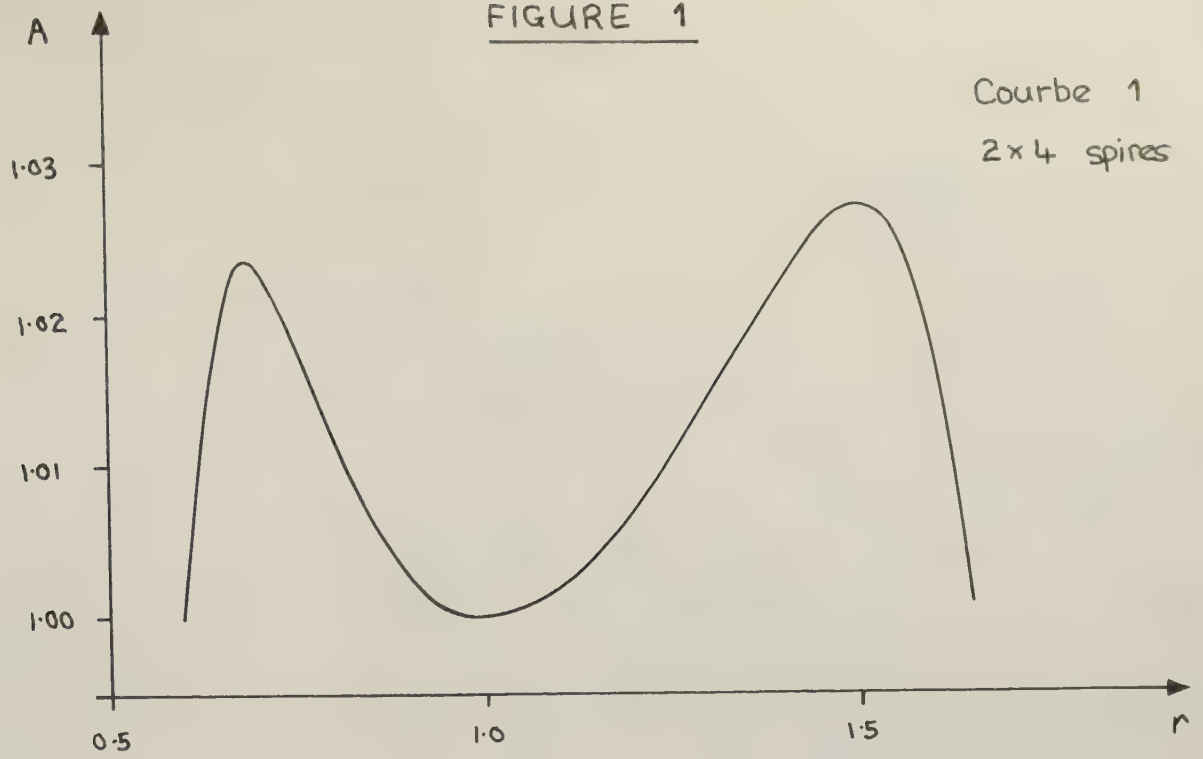


10



12

FIGURE 1



7 ▲

FIGURE 2.

Injection multitours: Principe

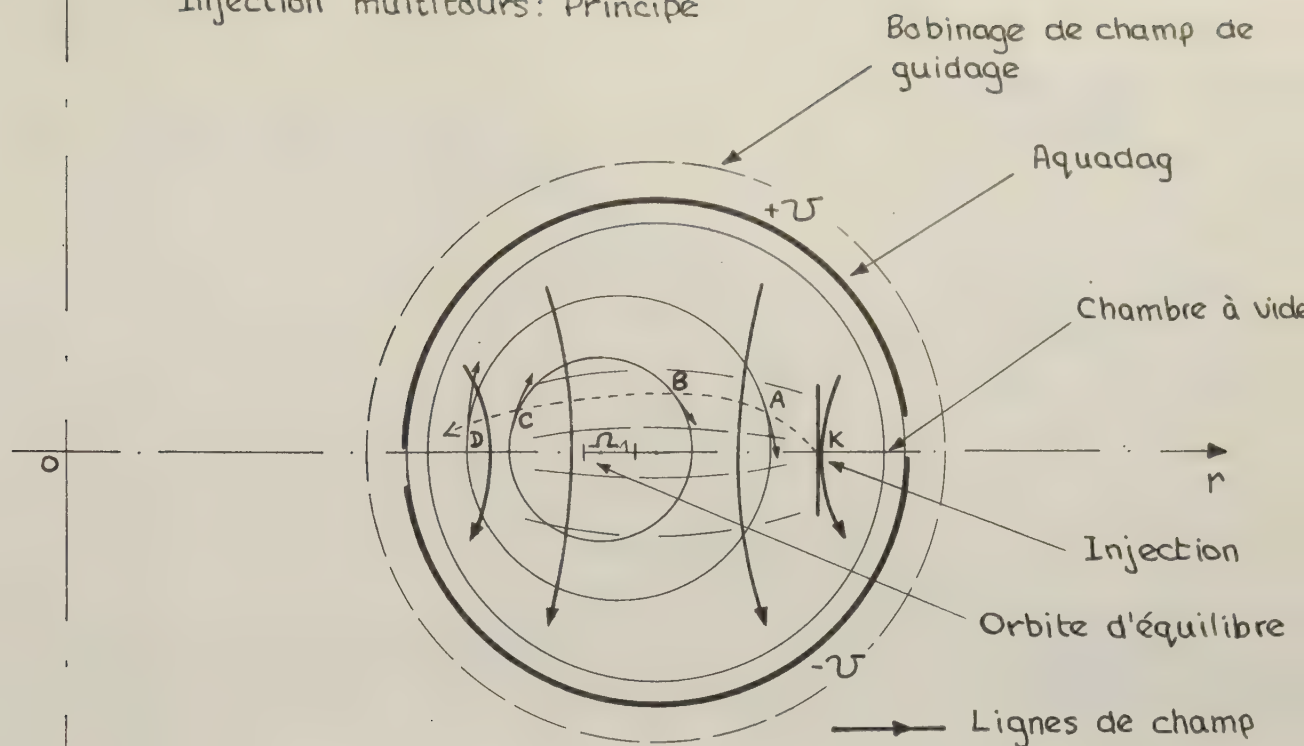
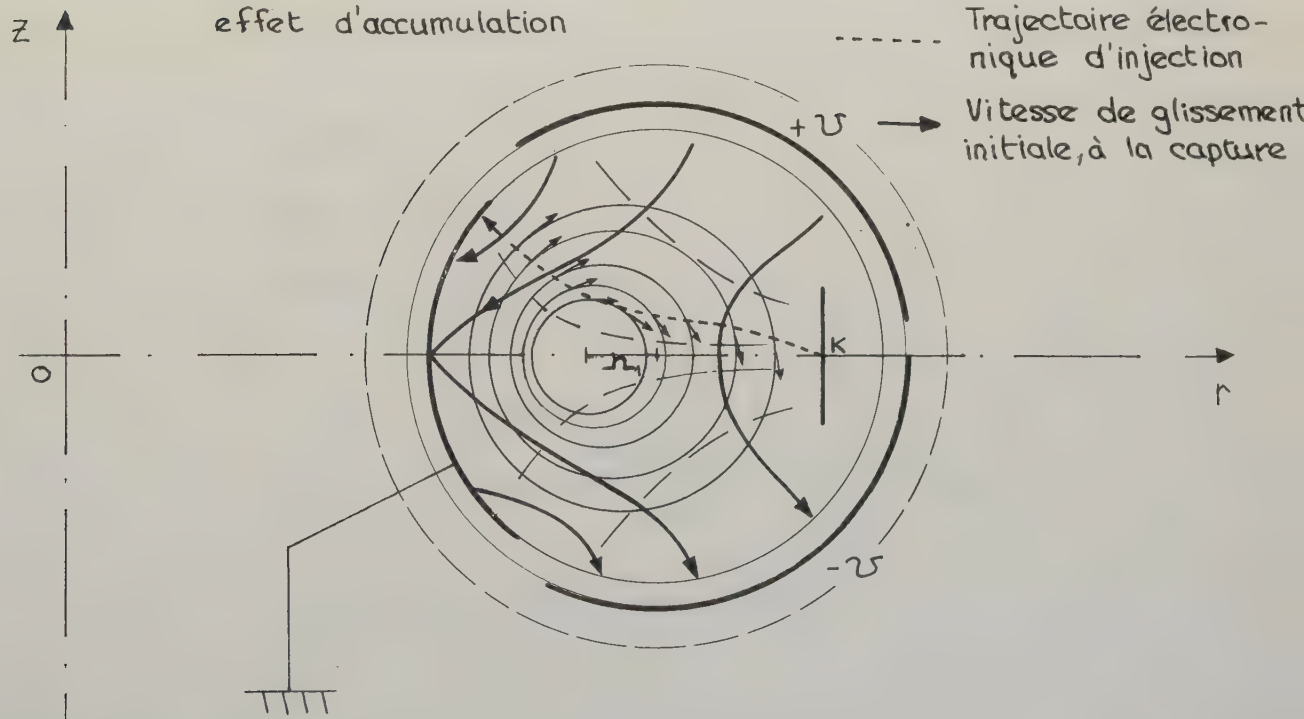


FIGURE 3

Injection multitours avec effet d'accumulation



Injection par champ azimutal pulsé

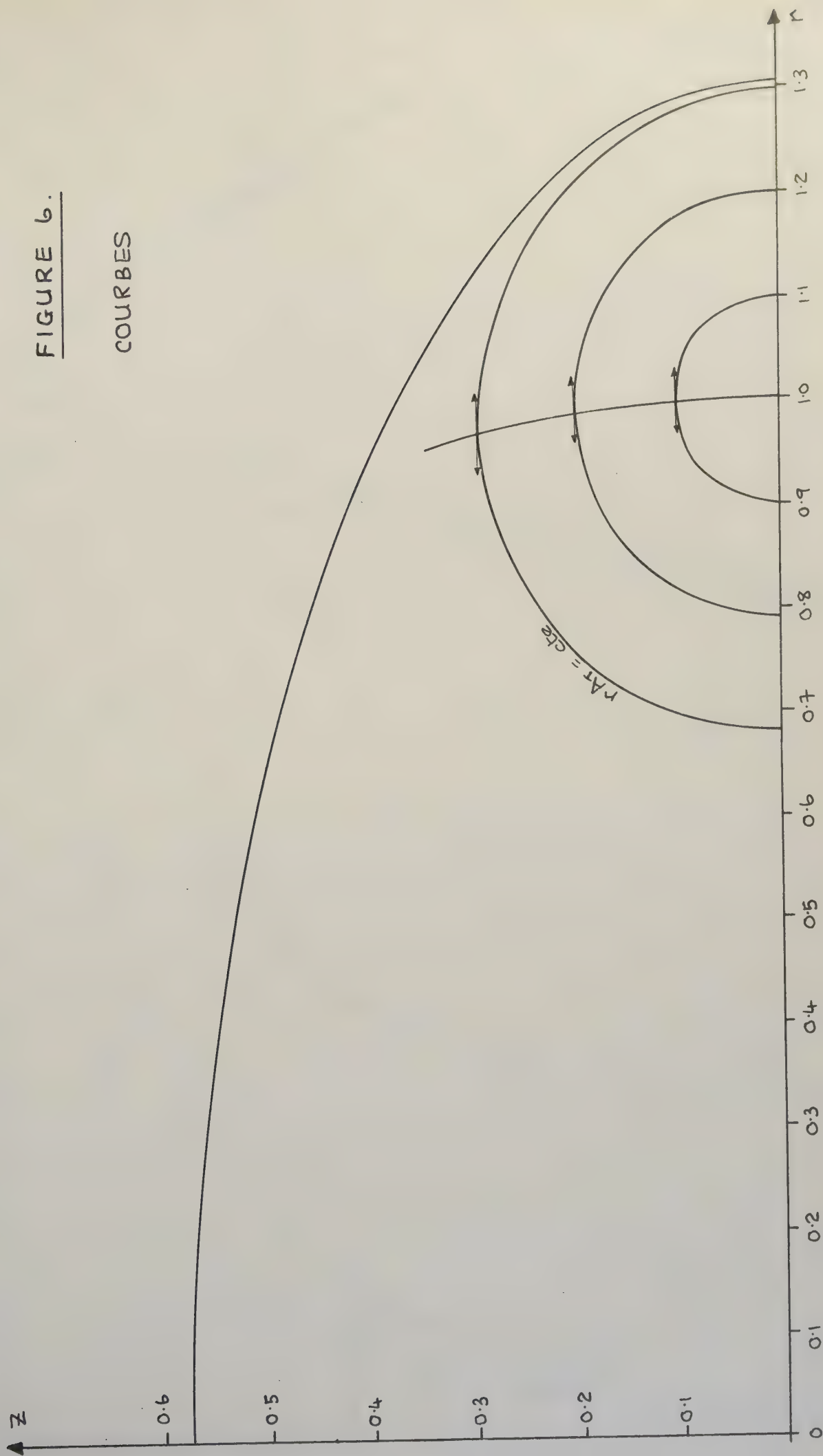
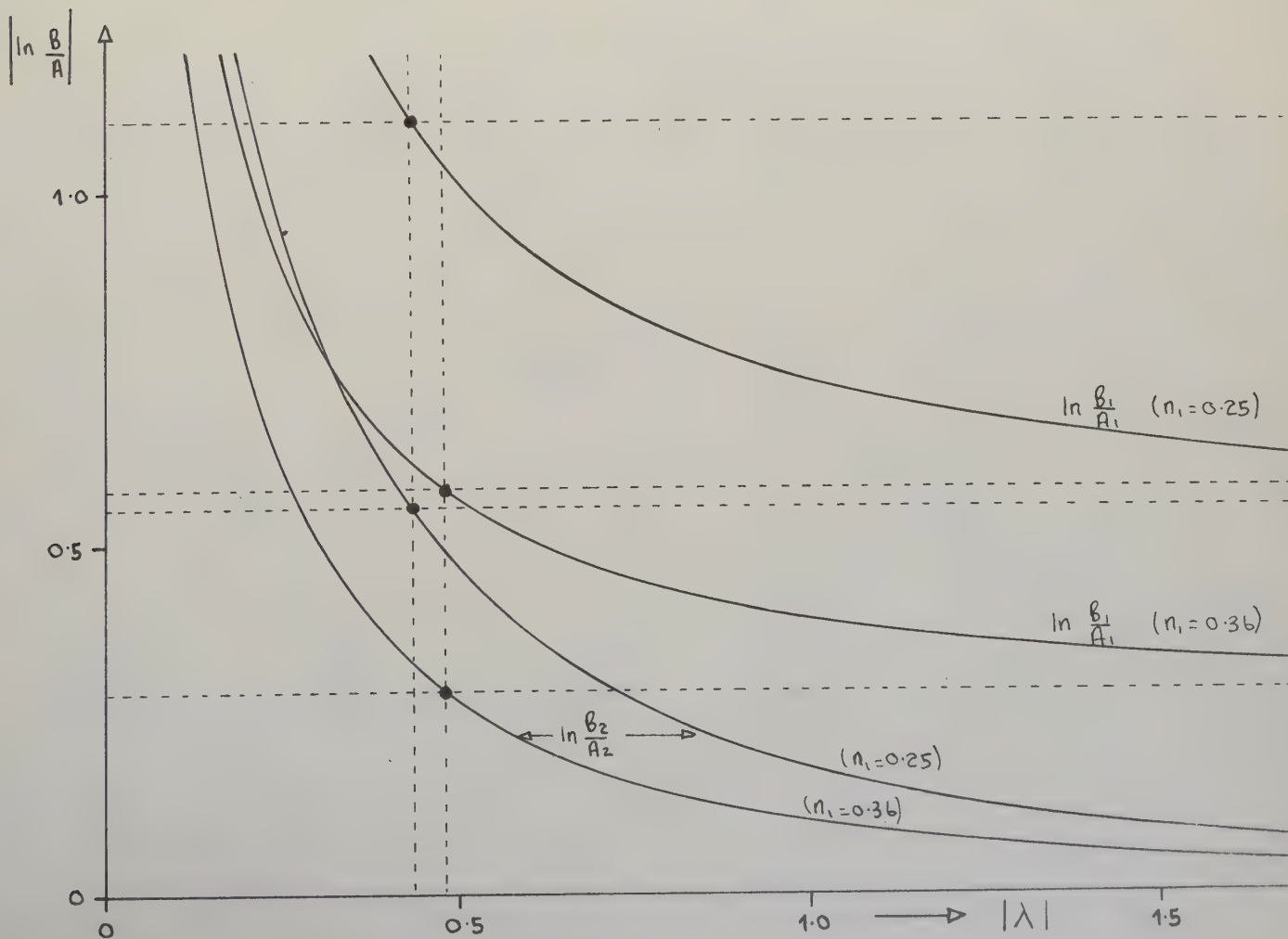
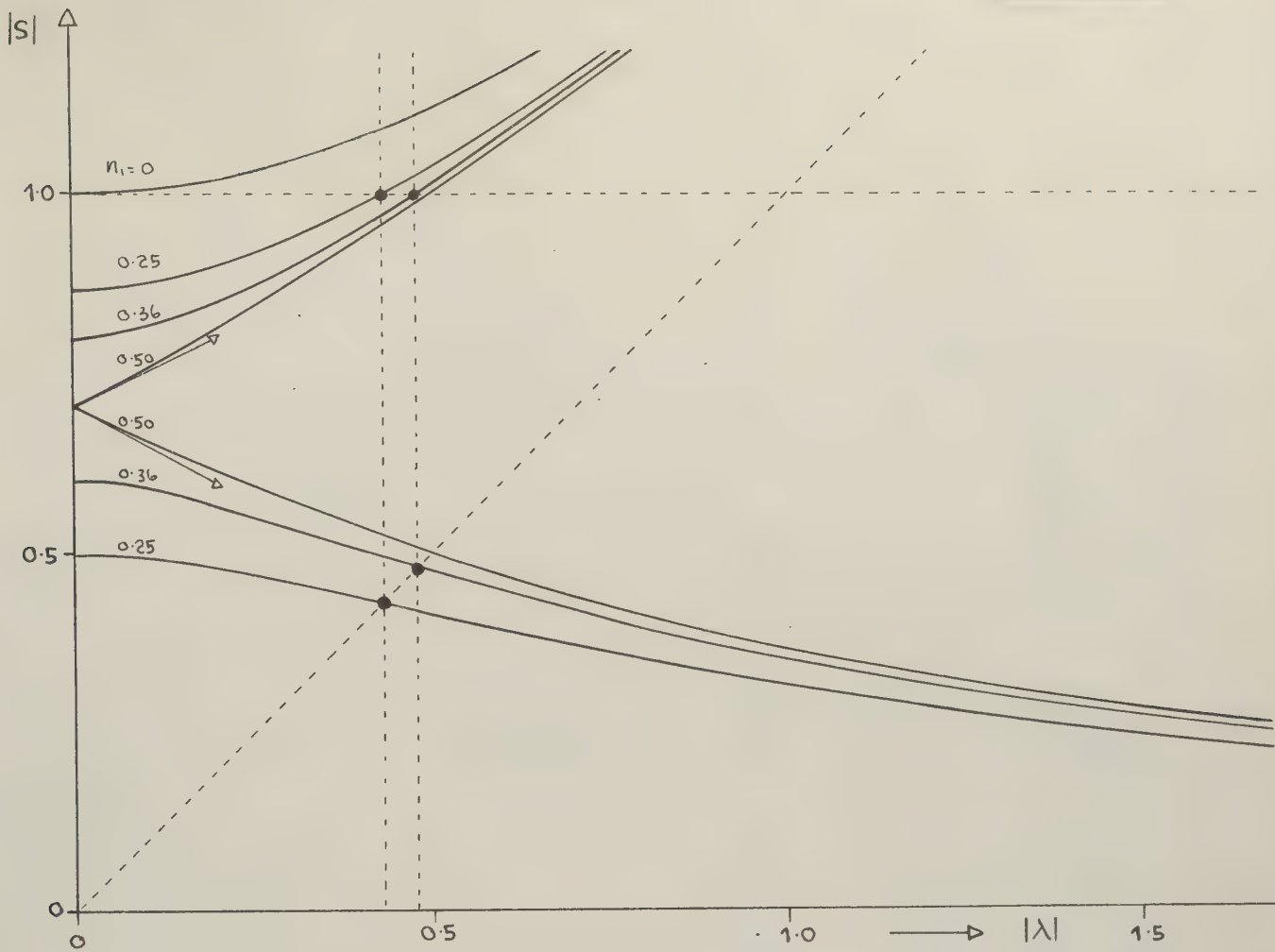


FIGURE 6.

COURBES

FIGURE I



$$\Lambda = 1.5 ; n = 0.5$$

$$k = 1$$

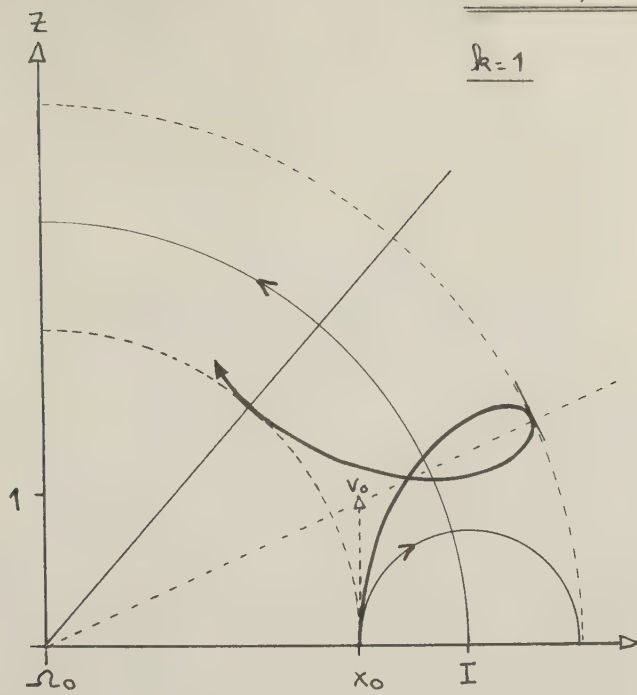
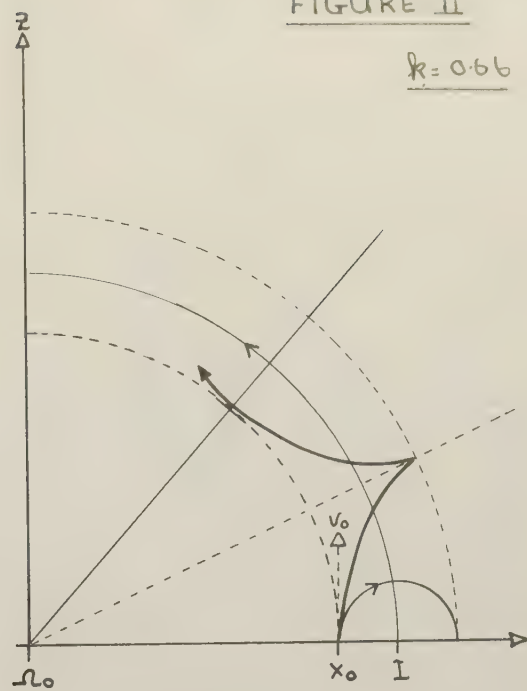
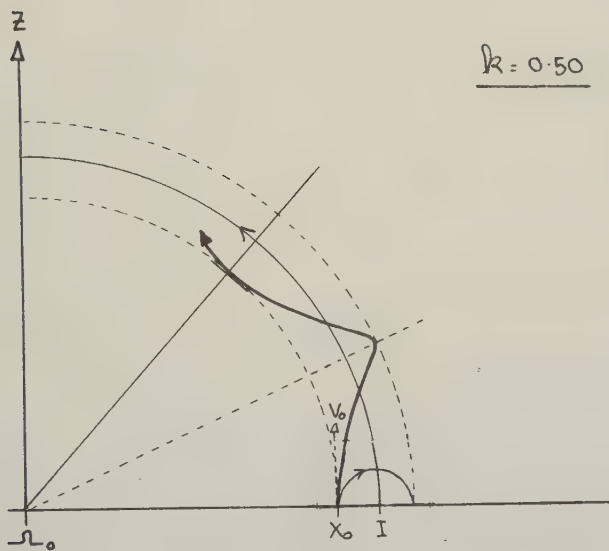


FIGURE II

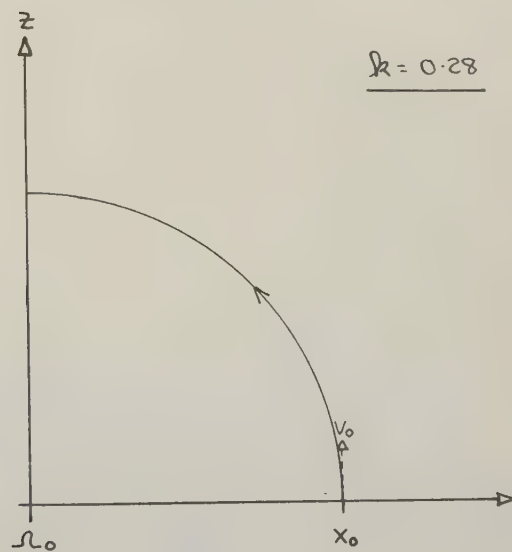
$$k = 0.66$$



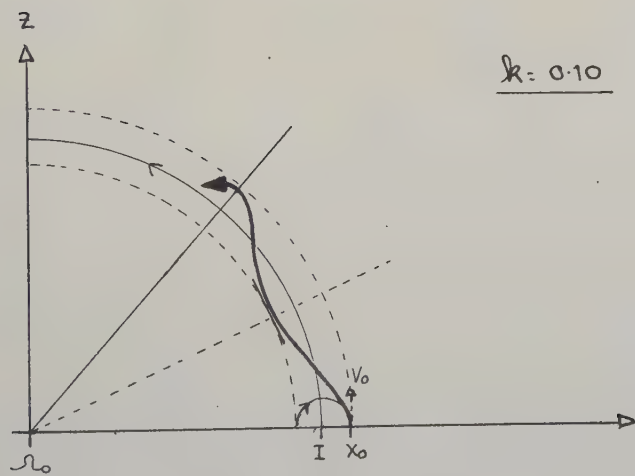
$$k = 0.50$$



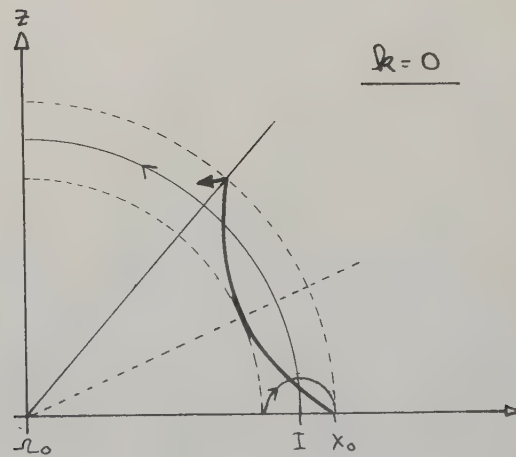
$$k = 0.28$$

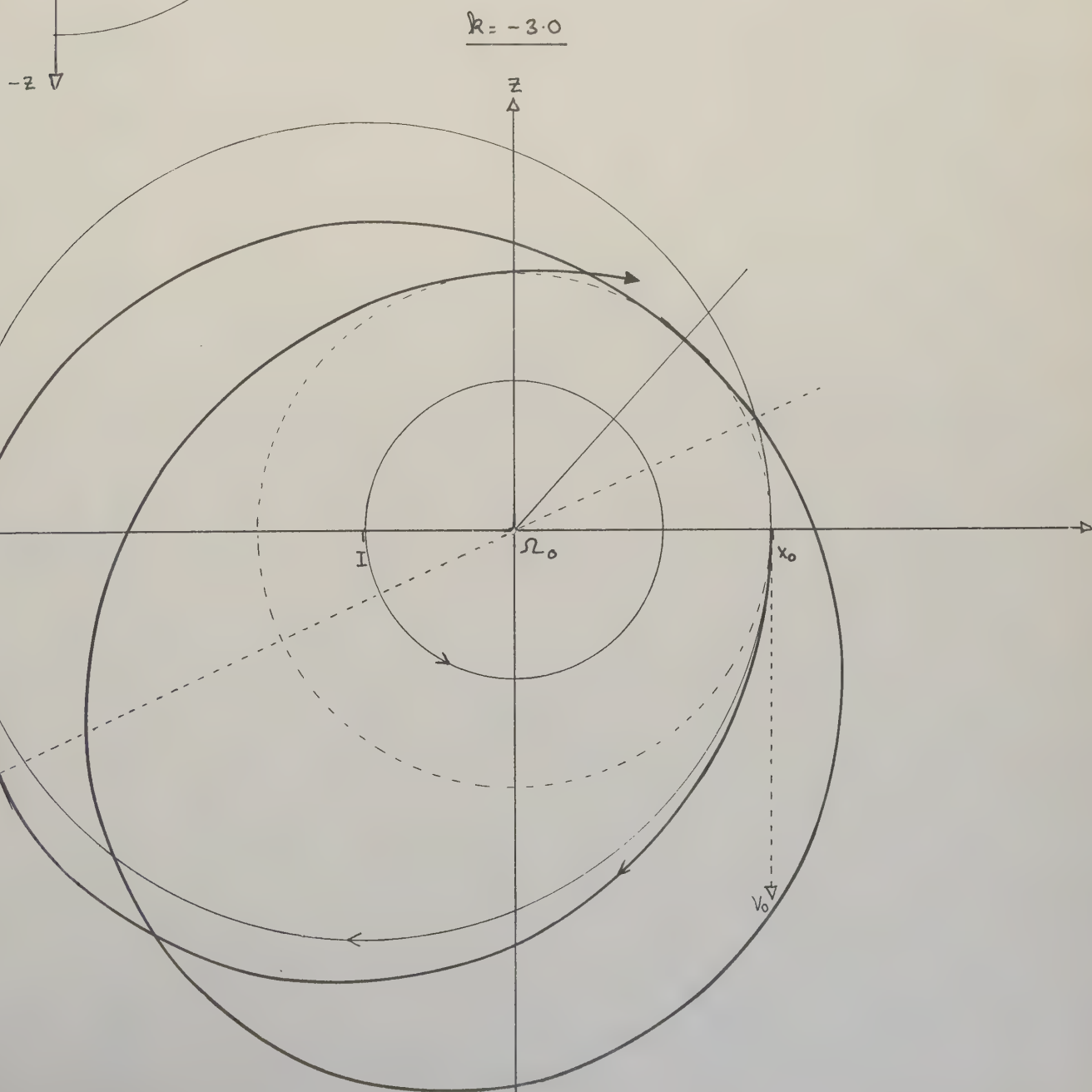
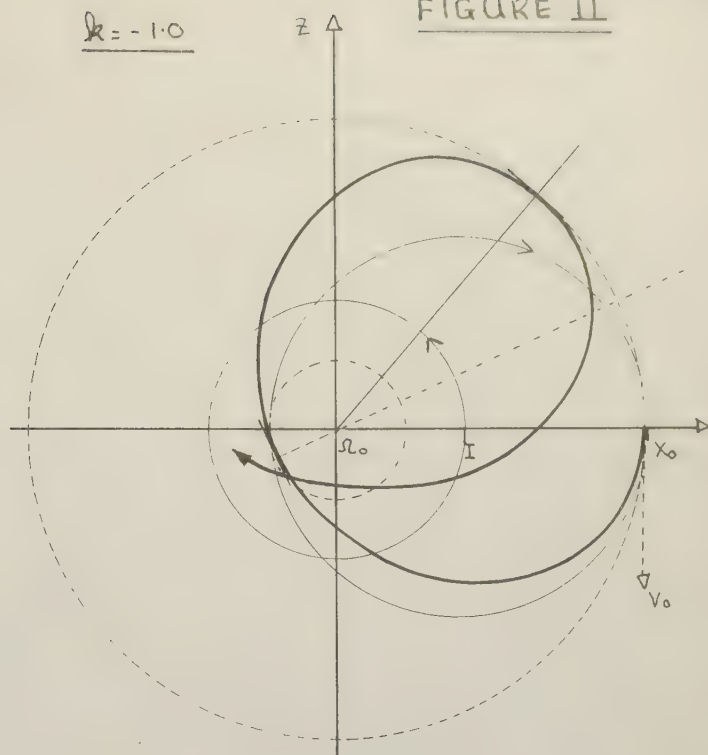
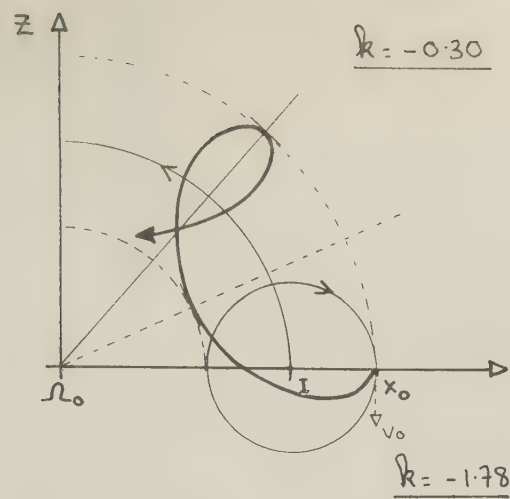


$$k = 0.10$$



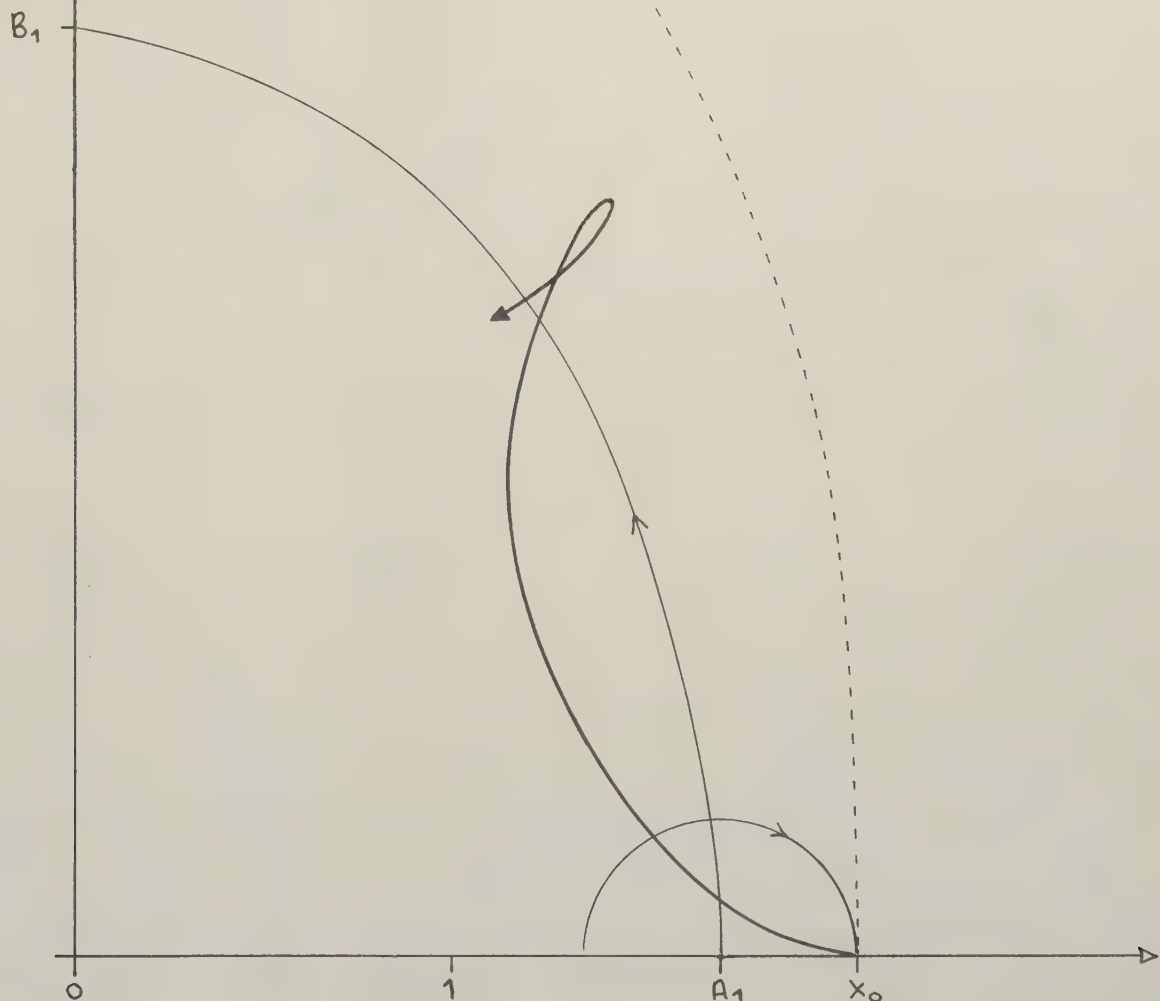
$$k = 0$$





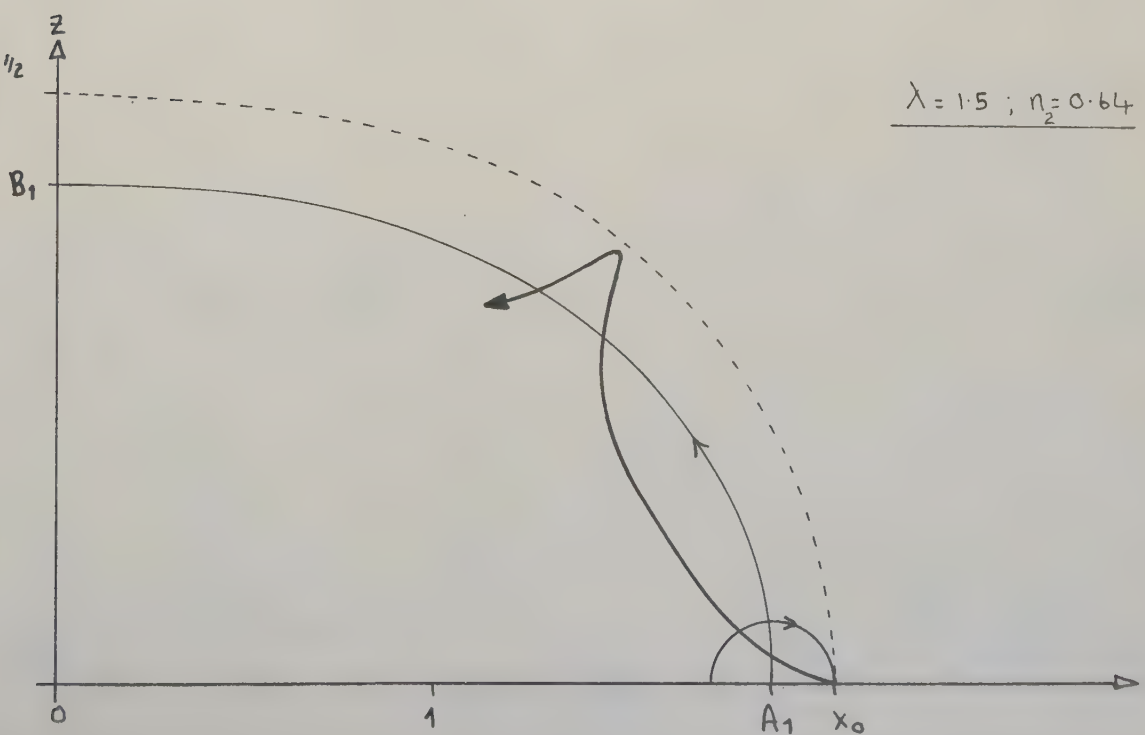
$$\lambda_0 \left[\frac{1-n_1}{n_1} \right]$$

$$\lambda = 1.5 ; n_1 = 0.36$$



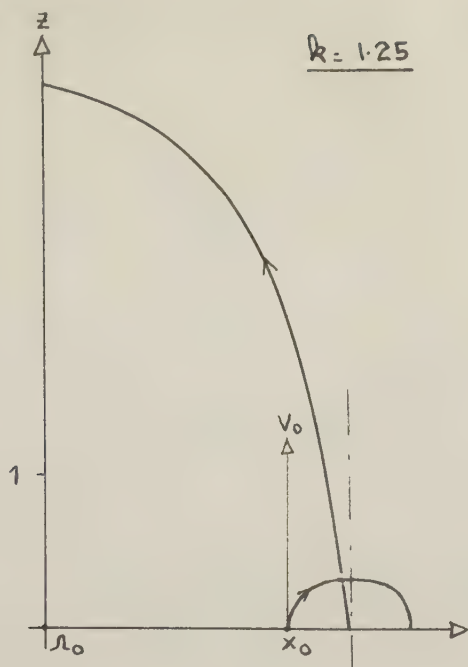
$$x_0 \left[\frac{1-n_2}{n_2} \right]^{1/2}$$

$$\lambda = 1.5 ; n_2 = 0.64$$



$$\eta_1 = 0.36$$

$$\lambda = Q_1 Q_2 = 0.48$$



$$\eta_2 = 0.64$$

$$\lambda = Q_1 Q_2 = 0.48$$

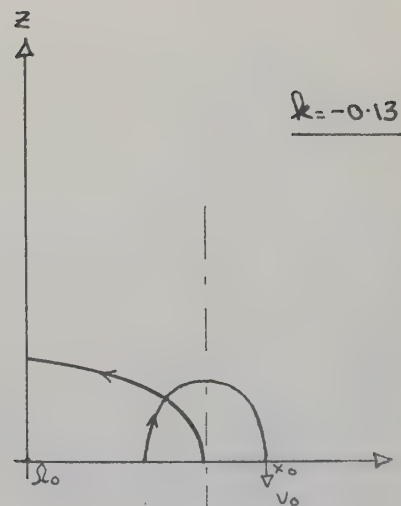
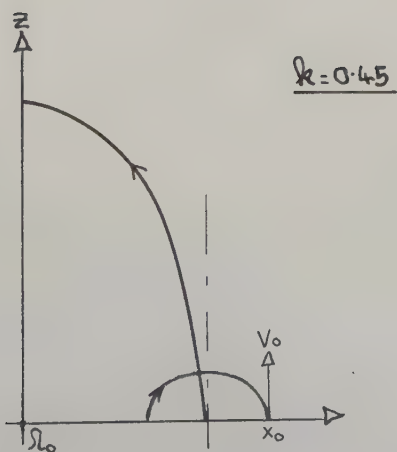
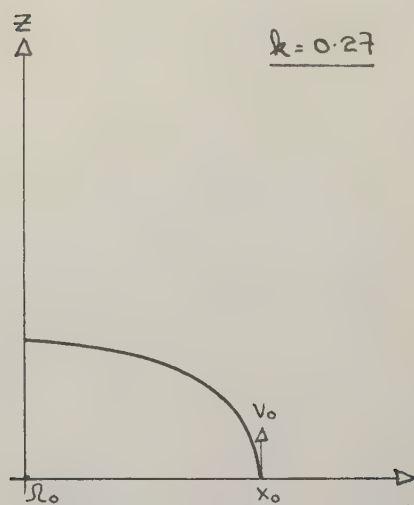
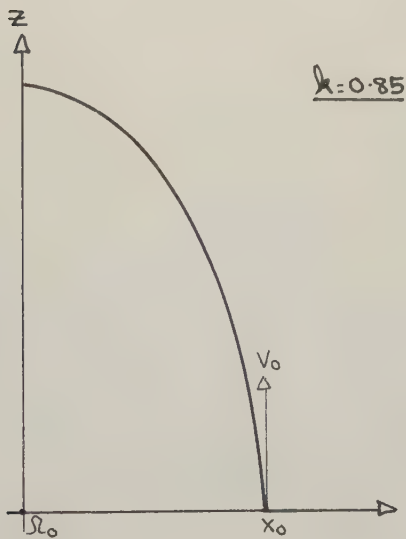
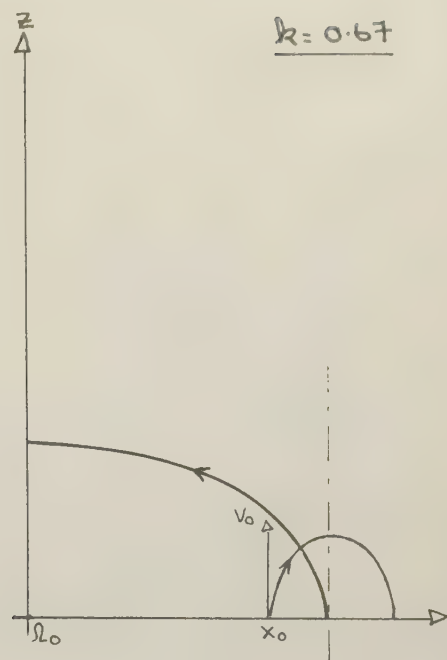
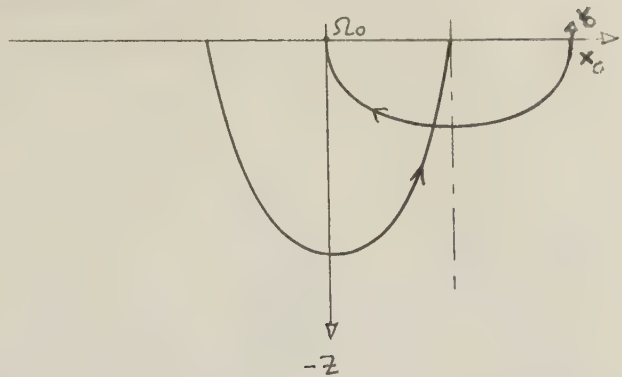


FIGURE IV

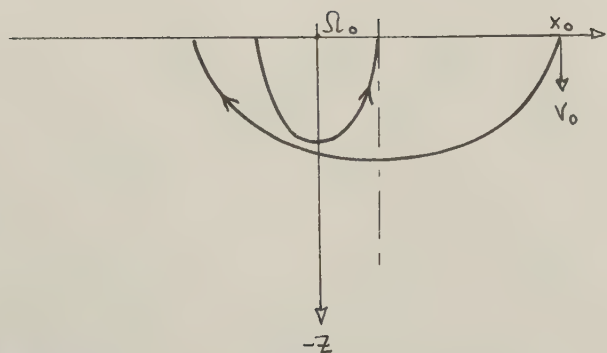
$$n_1 = 0.36$$

$$\lambda = 0.48$$

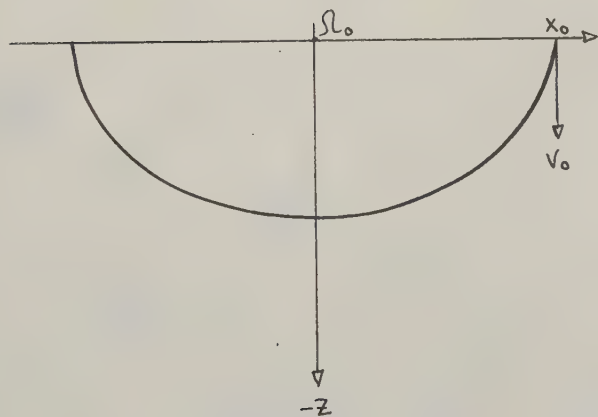
$$k = 0.05$$



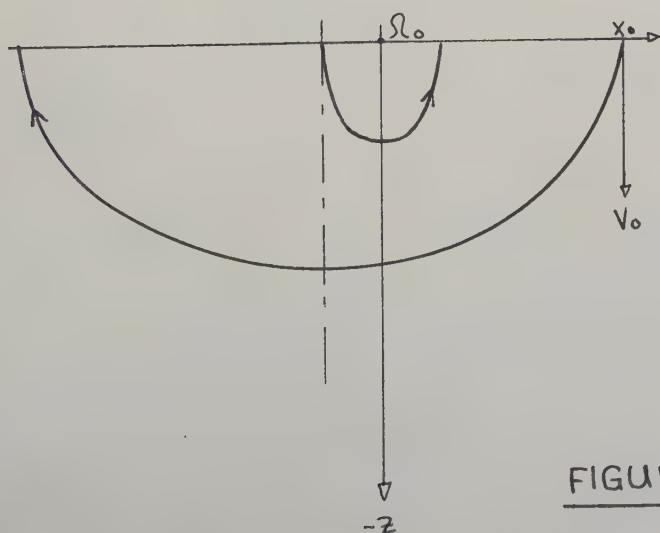
$$k = -0.35$$



$$k = -0.75$$



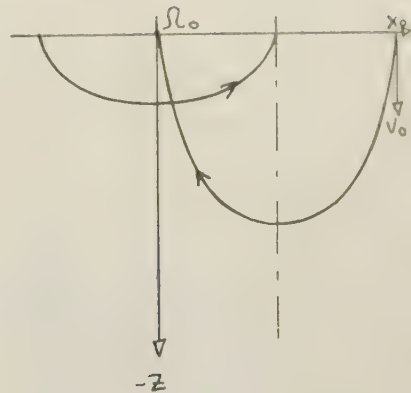
$$k = -1.15$$



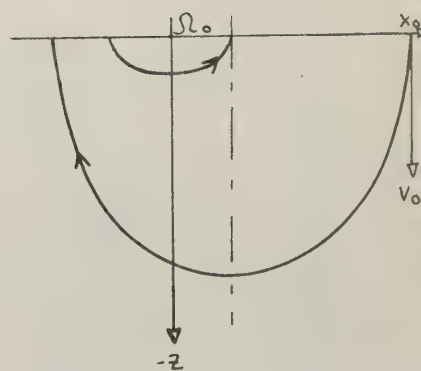
$$n_2 = 0.64$$

$$\lambda = 0.48$$

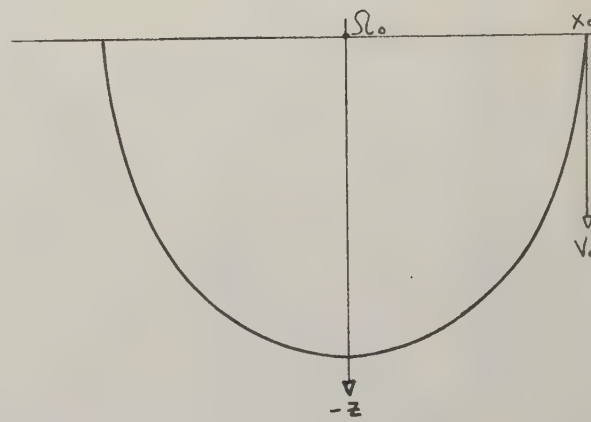
$$k = -0.53$$



$$k = -0.93$$



$$k = -1.33$$



$$k = -1.73$$

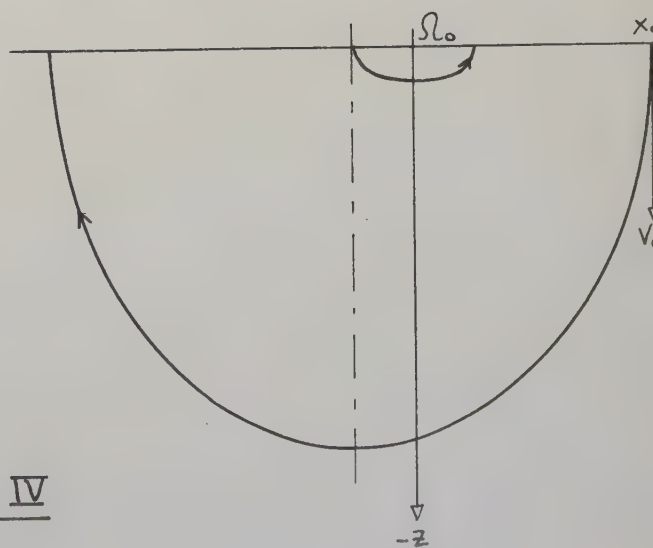
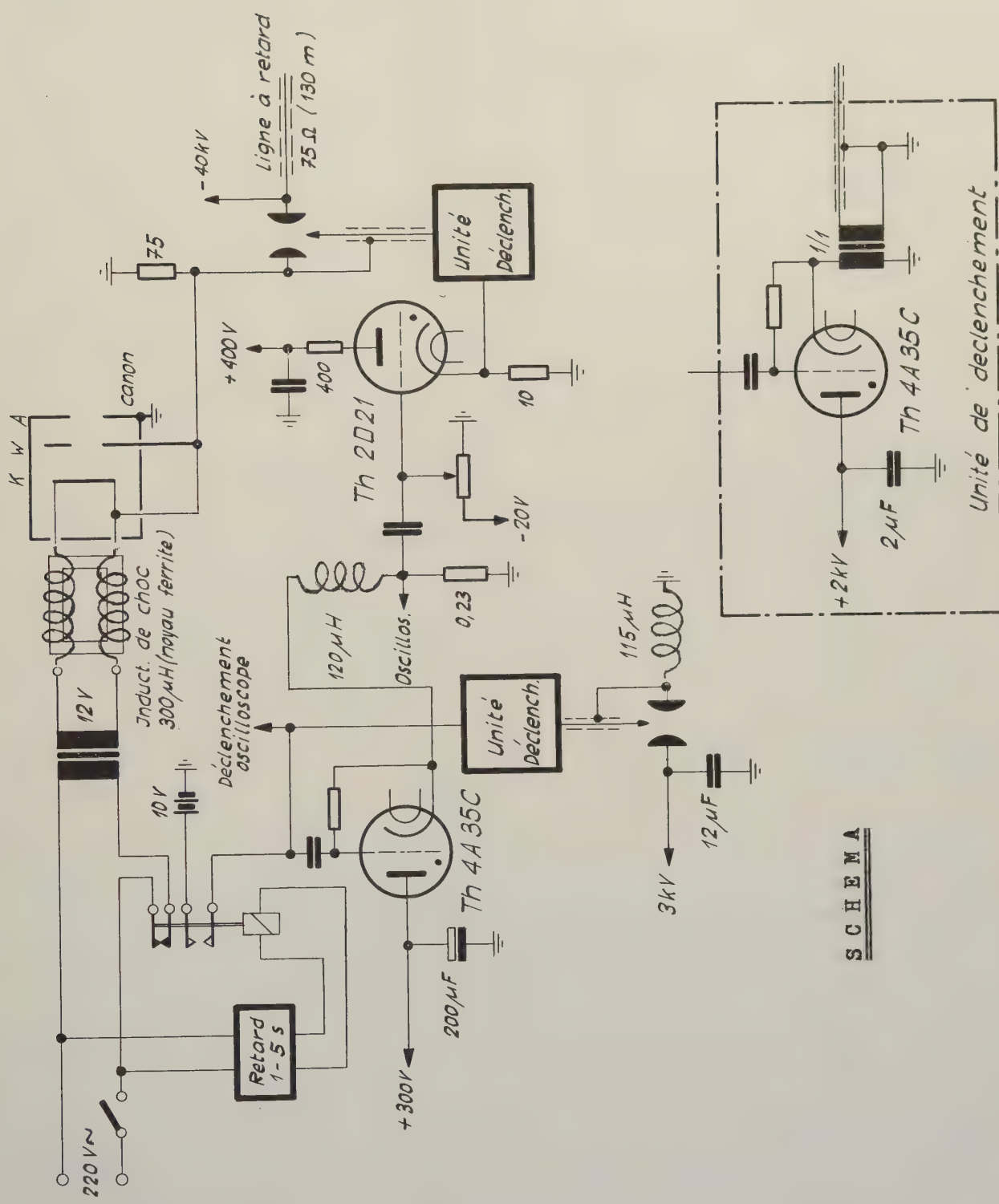


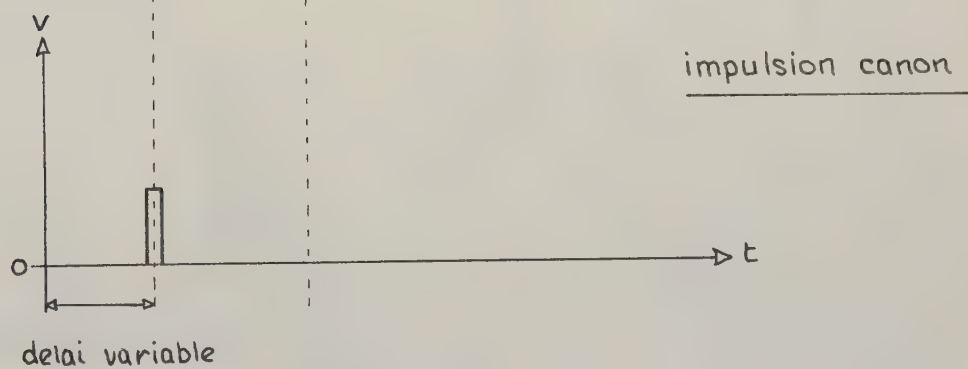
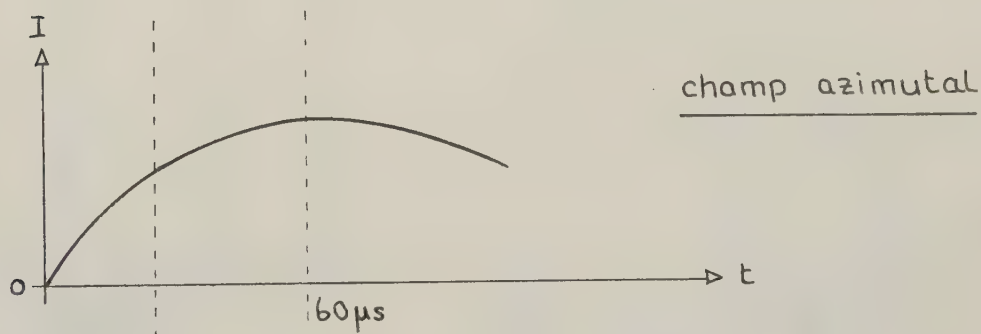
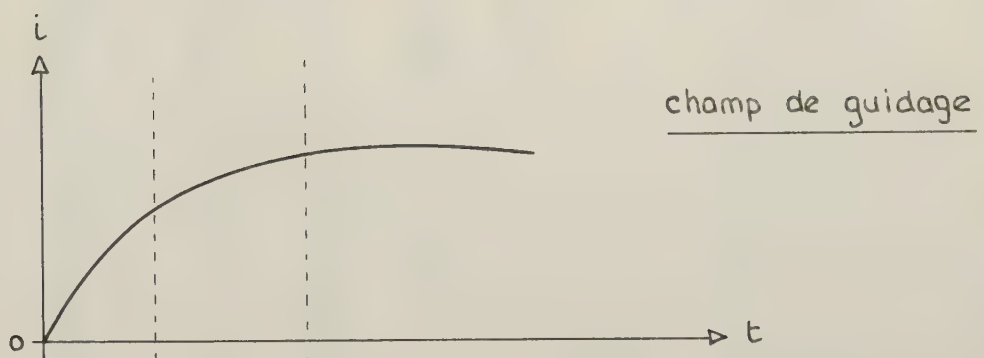
FIGURE IV



S C H E M A

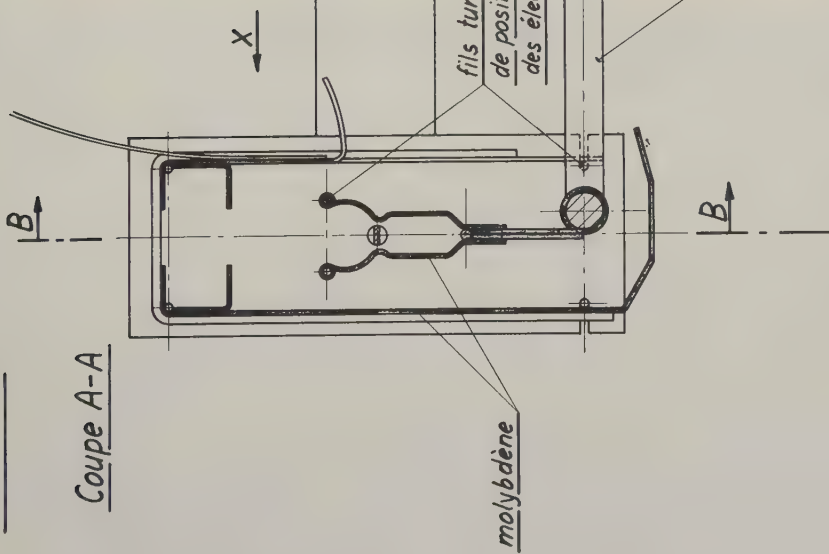
Electronique de l'injection en régime quasi-statique.

DIAGRAMMES

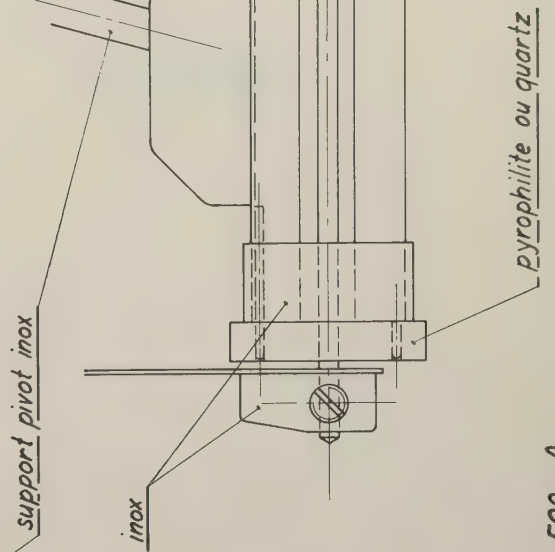
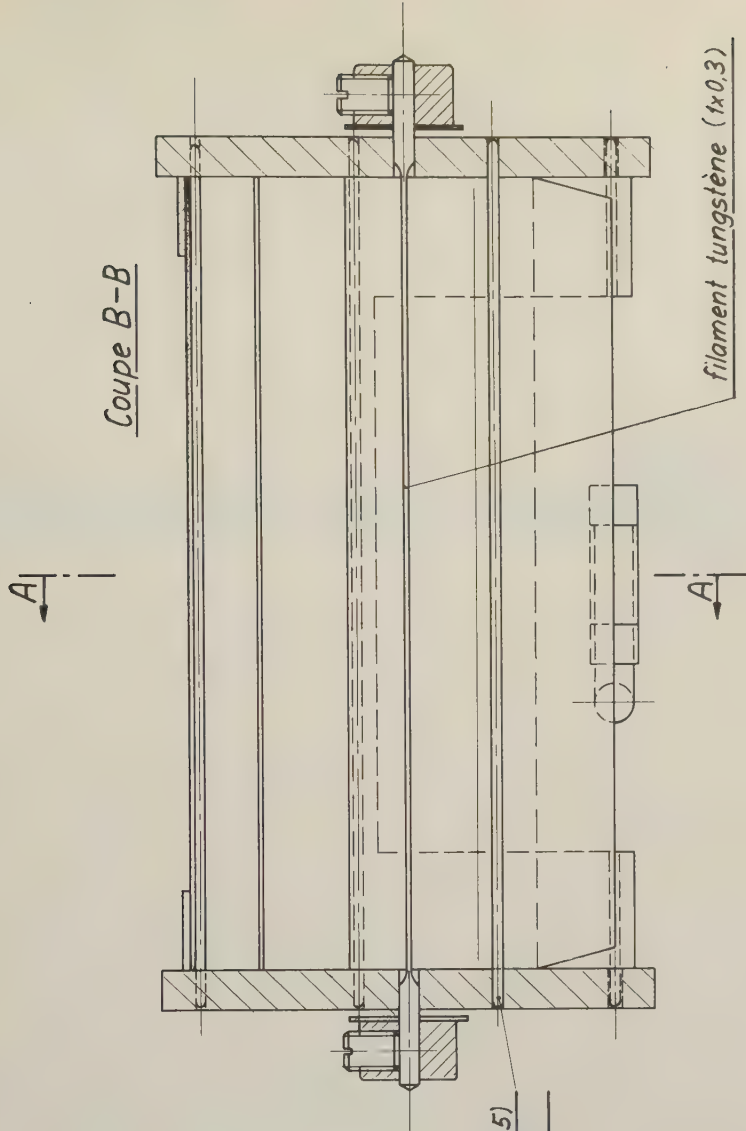


Dessin 1a

Coupe A-A

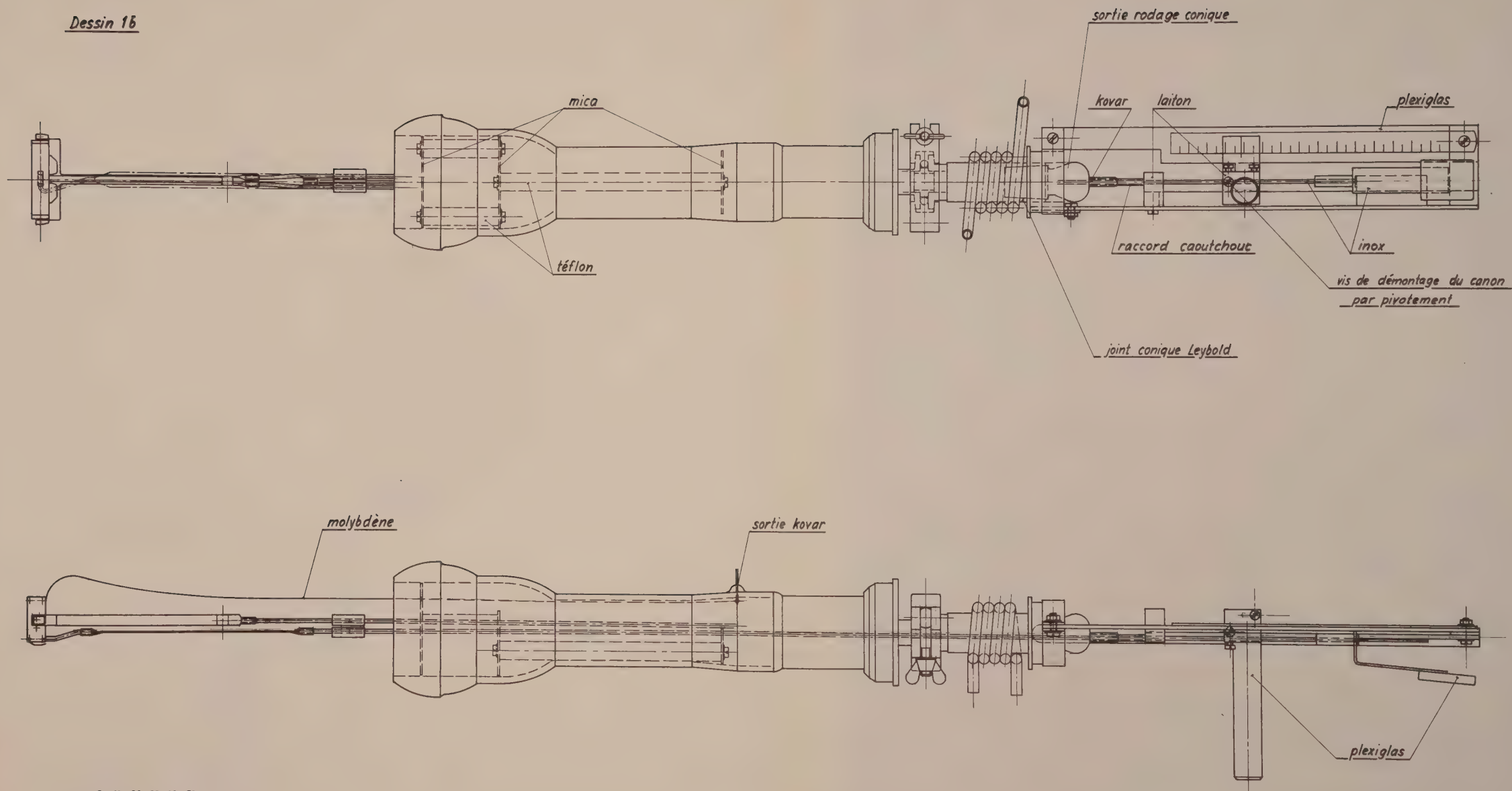


Coupe B-B

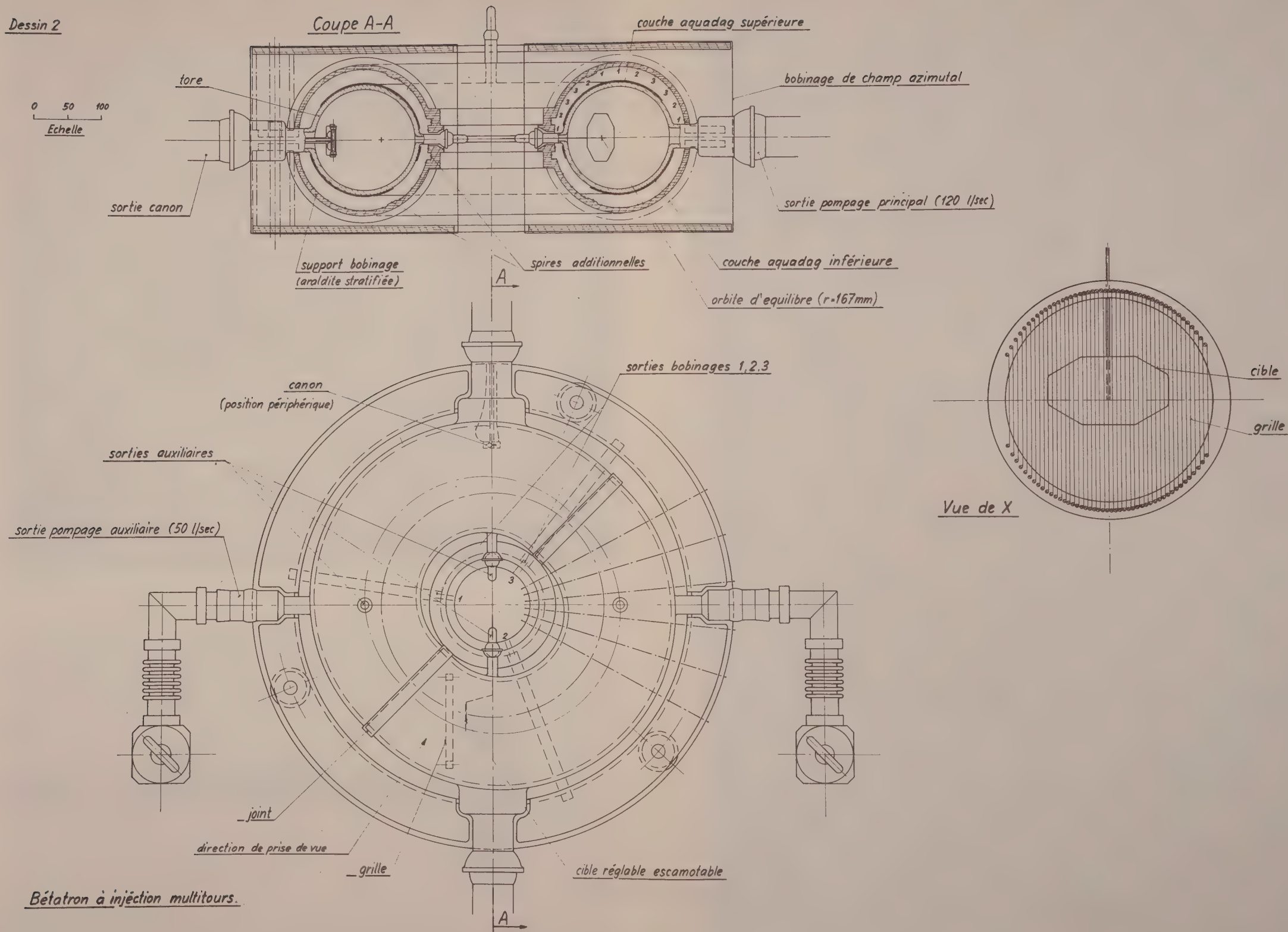


Canon à chauffage pulsé 15KV - 500mA

Dessin 16



Dessin 2



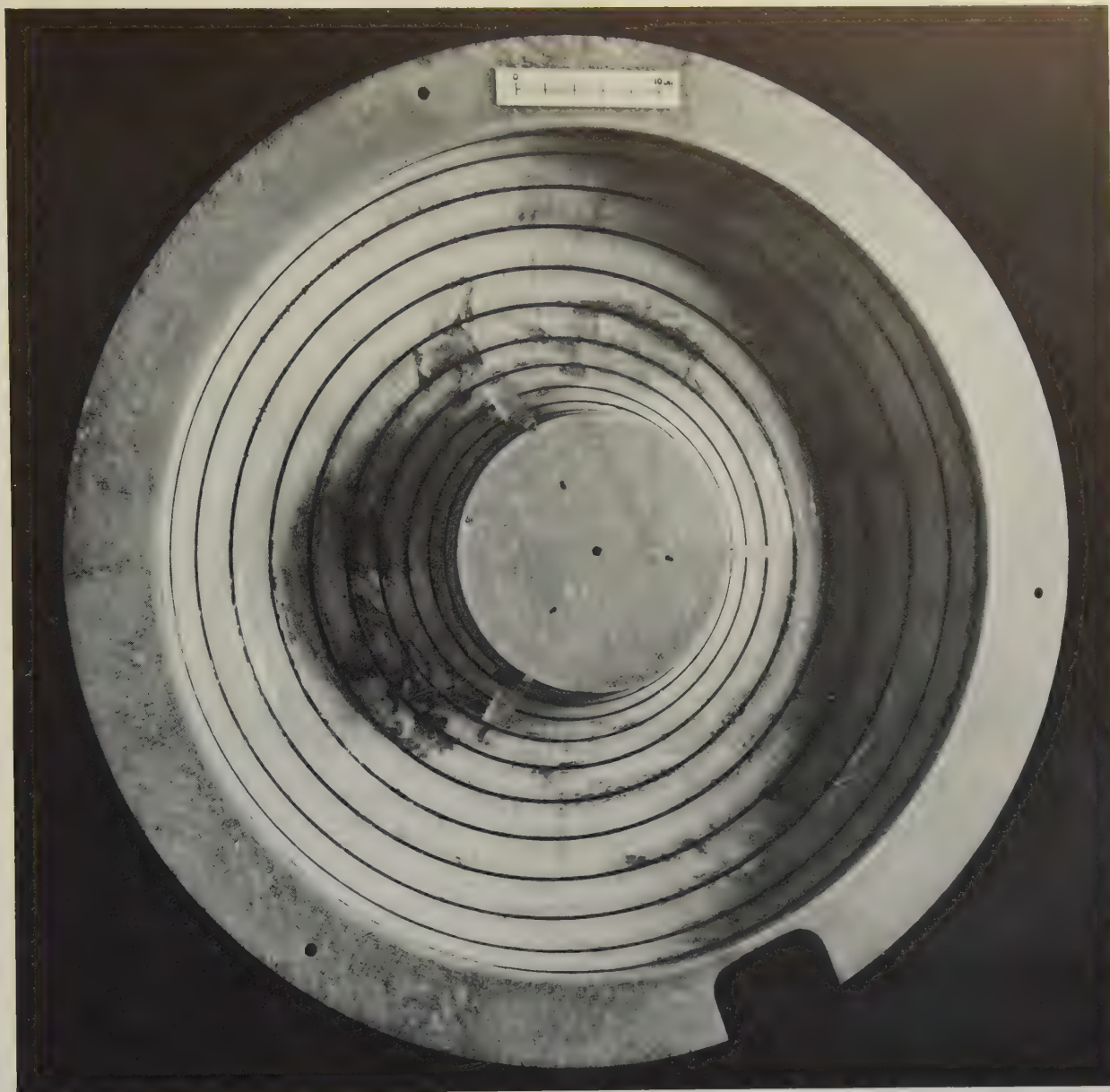


Photo 1

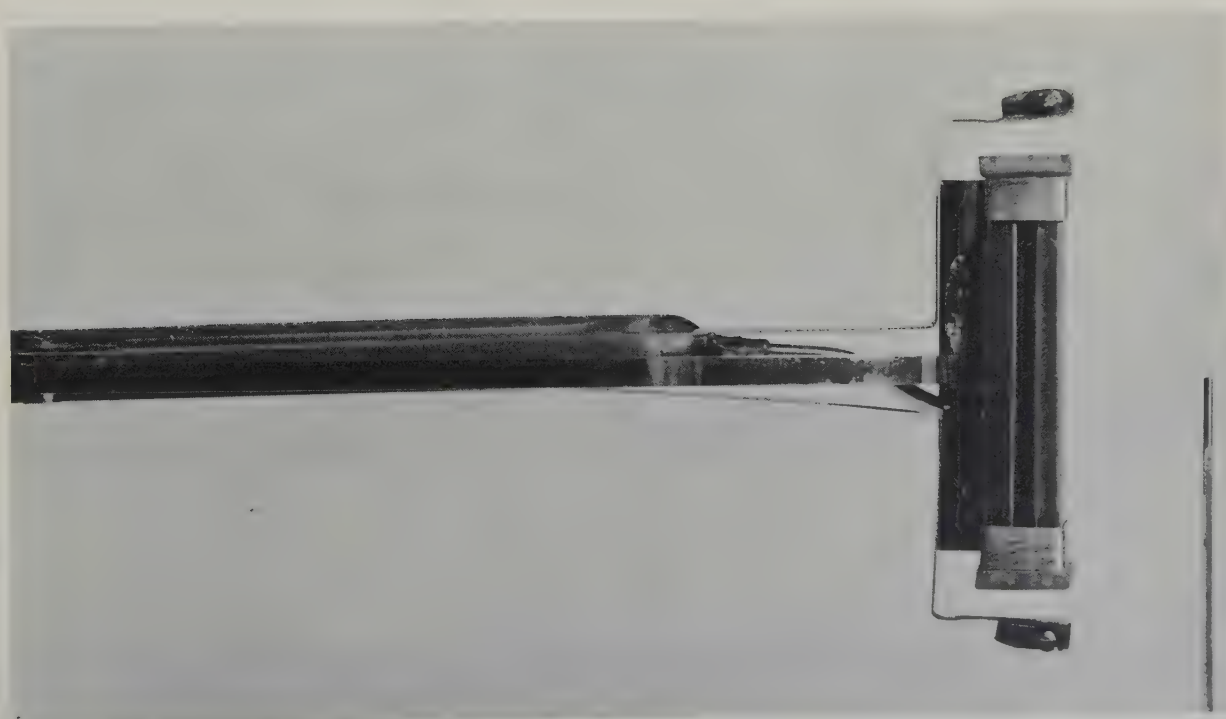


Photo 2

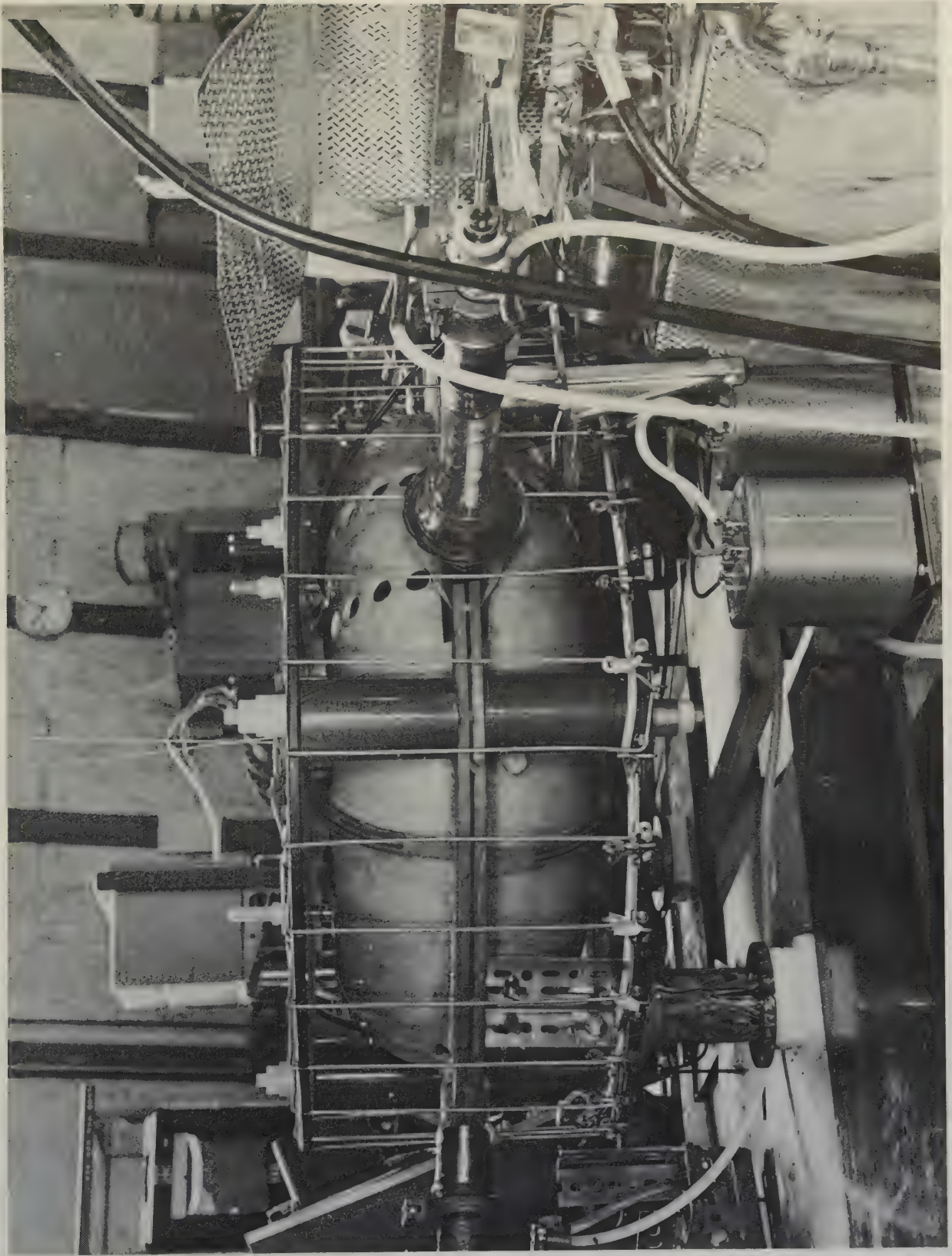


Photo 3

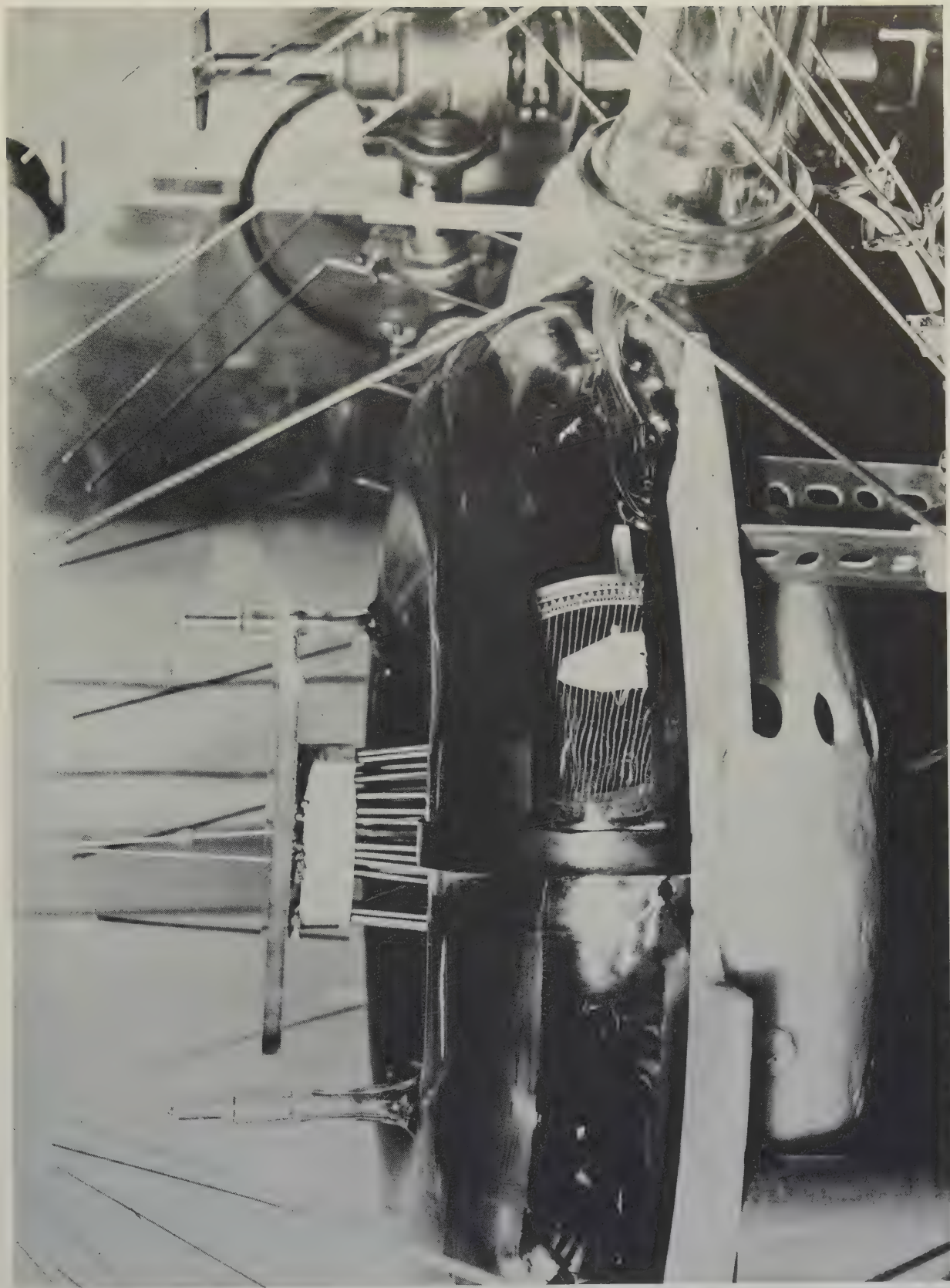


Photo 4

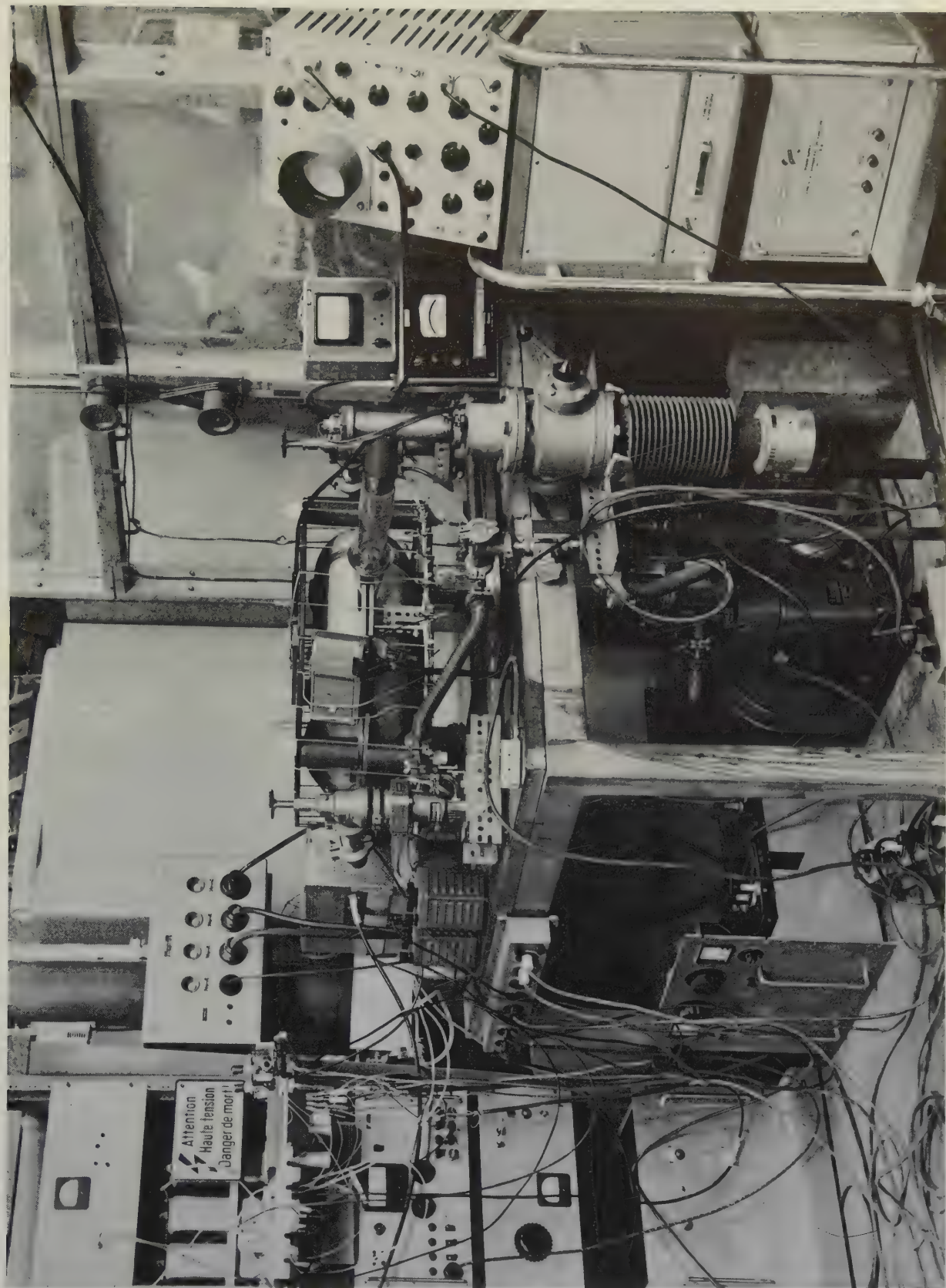


Photo 5

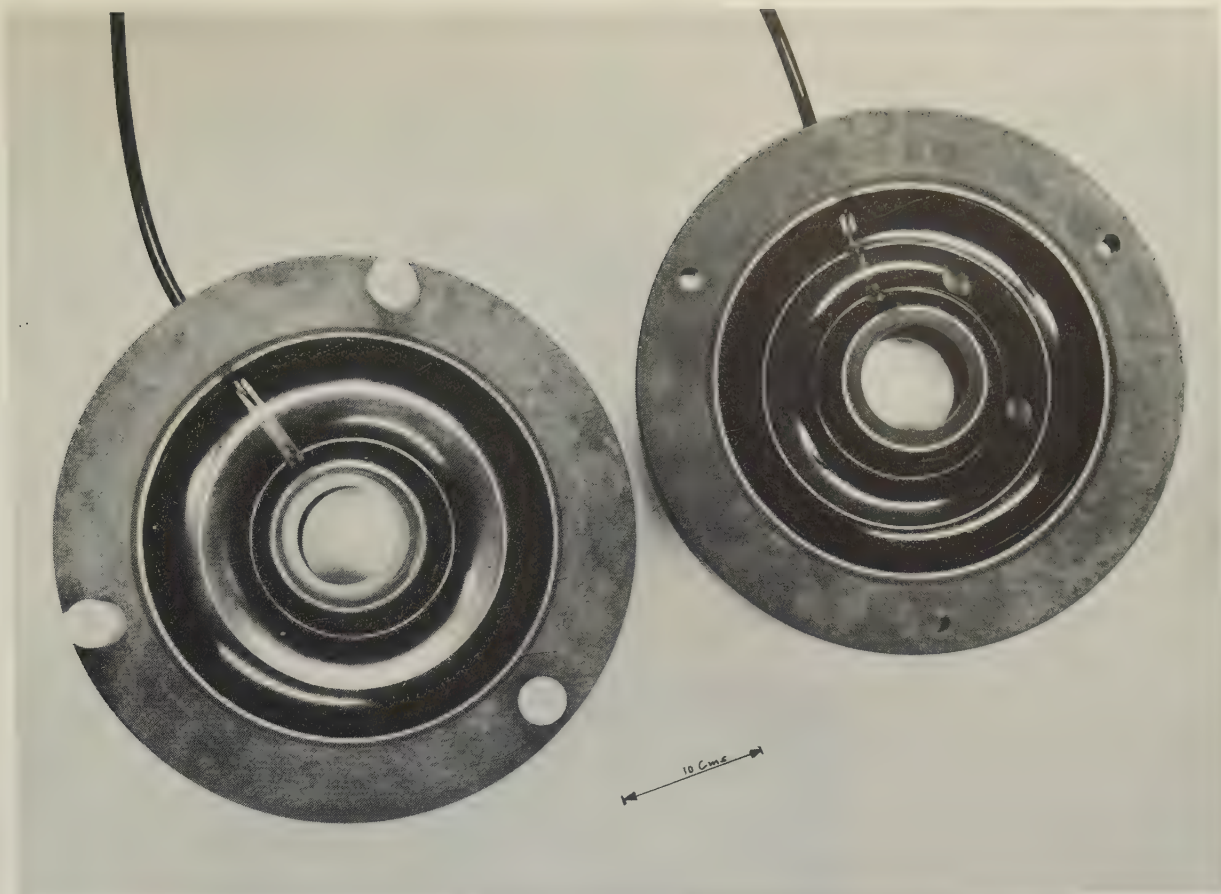


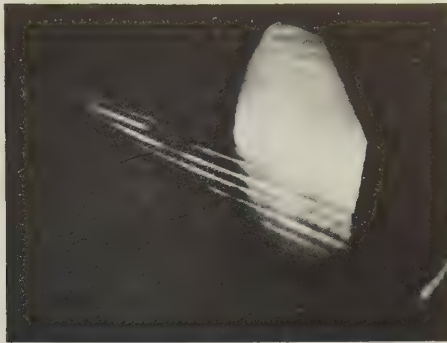
Photo 6



Photo 7

(avec un champ azimuthal croissant)

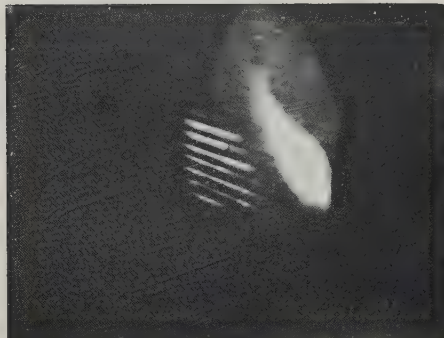
1



2



3



4

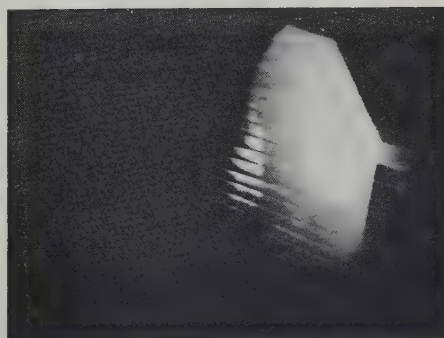


Planche II

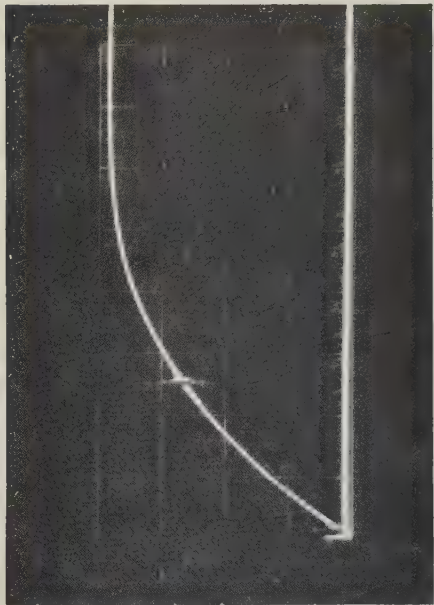
Déplacement transversal du faisceau

a) Déplacement vertical

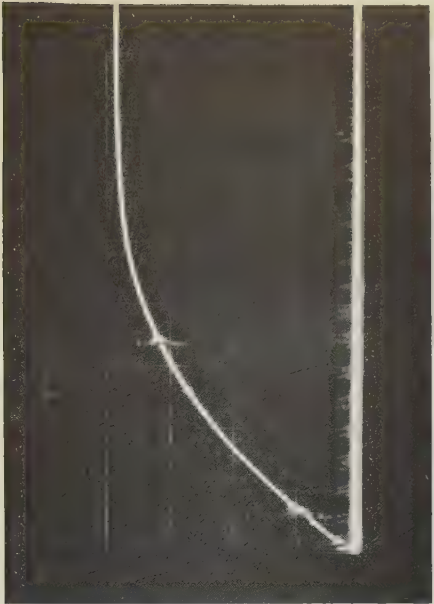
1



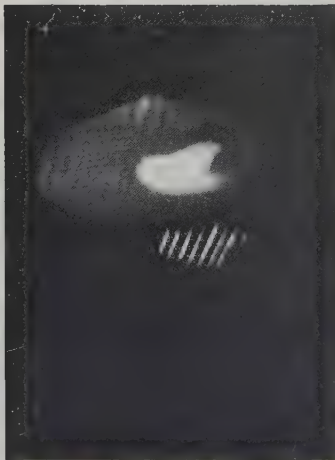
2



3



1'



2'

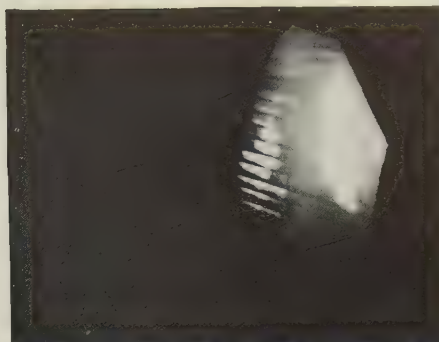


3'

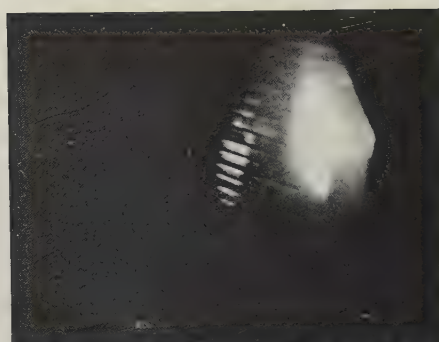


b) Déplacement oblique.

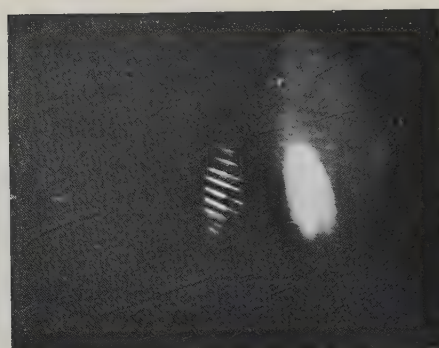
1



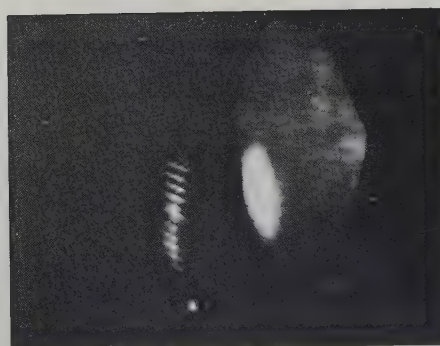
2



3



4

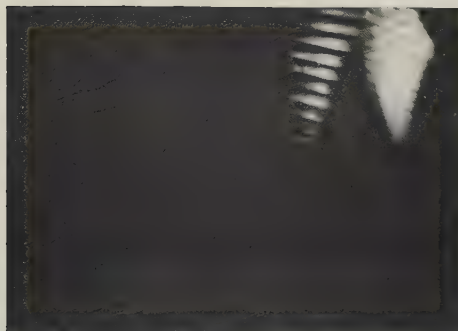


(Injection périphérique)

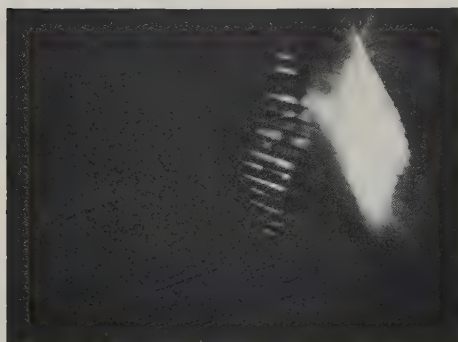
1



2



3



4

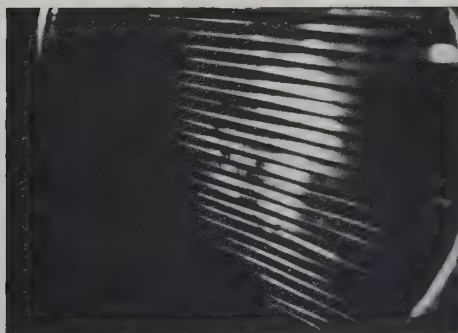


Planche IV

Mesure du courant

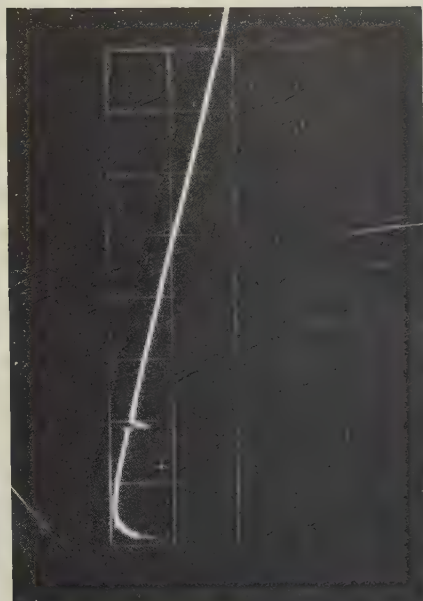
a) Mesure directe



1

b) Mesure indirecte

a) Balayage lent



1

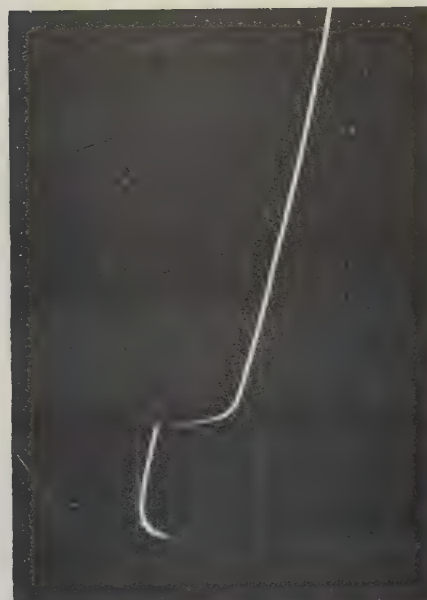
β) Balayage rapide



1



2

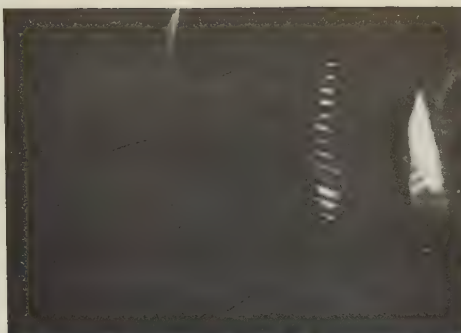


2

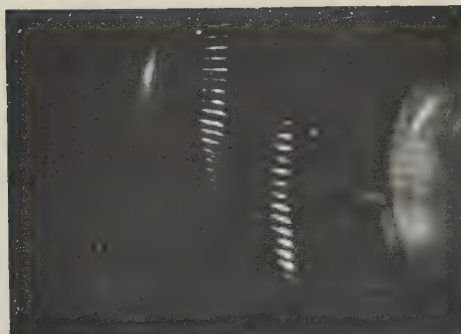


2

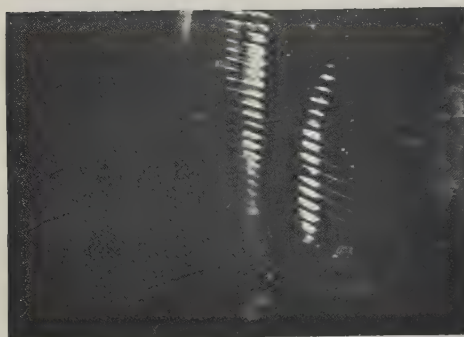
1



2



3



4



5



DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté :

"Généralisation circulaire et relativiste de l'équilibre du faisceau de Brillouin".

Vu et approuvé

Paris, le 10 mai 1963

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Marc ZAMANSKY

Vu et Permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Paris

Jean ROCHE

